TRANSPORTNI PROBLEM

Posebno mesto u linearnom programiranju ima transportni problem. Izdvajanje TP je usledilo zbog karakteristika postavke njegovog matematičkog modela, koji omogućava velika uprošćenja u nalaženju optimalnog rešenja. I mada je postavljen i rešen pre nastanka metodologije LP, TP je sastavni deo LP. Naziv TP potiče iz vremena njegovog nastanka 1941. g. kada su transportni problemi poslužili da se konstruiše prvi od matematičkih modela u LP, koji je kasnije primenjen u raznim problemima u agronomiji, medicini, proizvodnji.... TP u standardnoj matematičkoj formulaciji prvi je postavio i rešio **F.L.Hitchcock** 1941. godine. Pre njega, poznati sovjetski naučnik **L.V.Kantarovič** je ukazao na slične probleme, ukazujući na značaj njihovog rešavanja. 1949. se pojavio njegov rad u kome tretira kontinulani oblik TP. Iako je dao postavke za rešavanje određenih problema, njegov rad nije dovoljno opšti za rešavanje svih problema. Zajedno sa G.Gavurinom objavljuje rad u kome takođe razmatra mogućnosti za rešavanje TP.

Pored sovjetskih naučnika, istovremeno i nezavisno od njih javlja se niz naučnika sa različitim rešenjima standardnog TP - T.Koopmans, A.Charnes i W.Cooper, L.Ford i Fulkerson, U.Gerštenhaber, H.Kahna itd.

Najzad, rešenje **G.Dantziga** dovodi do rešenja poznatog kao MODI metoda, tj. specijalni slučaj opšte simpex metode.

TP je specijalni slučaj LP. Specifičnost se ogleda u uprošćavanju matrice koeficijenata, koja odgovara ograničavajućim uslovima za standardni oblik LP. Uprošćavanje se odnosi na <u>oblik matrice</u> (ovde je ona data u obliku trouglaste matrice) i na <u>koeficijente ograničavajućih uslova</u> (koji su ovde izraženi alterantivno sa 1 ili 0).

Važno je napomenuti da TP ima daleko širu primenu. Naime, mnogi problemi koji nemaju mnogo sličnosti sa TP, formalno se izražavaju na isti način i do rešenja se dolazi na isti način.

Kod TP se najčešće traže mogućnosti za minimizaciju ukupnih transportnih troškova. Pretpostavka modela TP je da je količina resursa koju treba transportovati određena i da je homogena (jednorodna).Transportnim problemom se određuje optimalni plan prevoza jedne robe, ako su poznati:

- broj proizvodnih centar (otpremnih centara ili izvorišta), odakle treba organizovati prevoz robe
- broj prijemnih stanica (potrošačkih centara ili odredišta) u koje treba robu dopremiti
- ukupna količina robe koju treba prevesti iz otpremnih u prijemne centre
- cene prevoza po jedinici robe od svake otpremne do svake prijemne stanice

TP je takav problem da treba naći najracionalniji način snabdevanja više odredišta iz više izvorišta, a da pri tome troškovi transporta budu minimalni.

1. Matematička definicija TP

Označimo sa:

$I_1, I_2, ..., I_m$ izvorišta

$a_1, a_2, ..., a_n$ količinu za transport iz izvorišta

$P_1, P_2, ..., P_n$ odredišta

$b_1, b_2, ..., b_n$ kapacitete odredišta

C_{ij} jedinične troškove

X_{ij} količina za transport od izvorišta do odredišta (I_i do P_j)

Uslovi TP se mogu prikazati tabelarno.

	odredišta →					
izvorišta ↓	P_1	P_2	P_3	...	P_n	a_i (ponuda izvorišta)
I_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
I_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
I_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	...	c_{3n} x_{3n}	a_3
...	...	...	...	...	...	...
I_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j (potrebe odredišta)	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum b_j=\sum a_i$

Pod optimalnim planom prevoženja podrazumeva se onaj plan prevoza od izvorišta do odredišta, kojim se minimizira cena prevoza, tj. ukupni troškovi.

f-ja cilja (tipa minimum) glasi**:**

$$\min f = \mathbf{c_{11}\, x_{11} + c_{12}\, x_{12} ... + c_{1n}\, x_{1n} + c_{21}\, x_{21} + c_{22}\, x_{11} + ... + c_{2n}\, x_{2n} + c_{m1}\, x_{m1} + c_{m2}\, x_{m2} ... + c_{m\,n}\, x_{m\,n}}$$

ili u obliku: **(min) f =** $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{sj}\, X_{ij}$

Ograničenja po vrstama su:

$a_1 = \mathbf{x_{11}+x_{12}+x_{13}+...+x_{1n}}$

$a_2 = \mathbf{x_{21}+x_{22}+x_{23}+...+x_{2n}}$

....

$a_m = \mathbf{x_{m1}+x_{m2}+x_{m3}+...+x_{mn}}$

Ograničenja po kolonama su:

$b_1 = \mathbf{x_{11}+x_{21}+x_{31}+...+x_{m1}}$

$b_2 = \mathbf{x_{12}+x_{22}+x_{32}+...+x_{m2}}$

....

$\mathbf{b}_n = \mathbf{x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+...+x_{mn}}$

<u>Pretpostavka modela</u> je da se ukupna količina iz izvorišta transportuje u odredišta, bez ostatka, pa je:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

Pri tome se postavlja dopunski uslov: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ koji znači zahtev da je ukupan obim proizvodnje u izvorištima jednak ukupnoj tražnji svih odredišta zajedno,

Treba odrediti nepoznato X_{ij}. Broj nepoznatih je pri tome (mxn), sistem sadrži (m+n) jednačina. Sve jednačine nisu nezavisne. Jedna od njih zavisi od ostalih (m+n-1), pa je broj bazičnih promenljivih (m+n-1), dok su ostale promenljive u bazičnom rešenju jednake nuli.

Slučaj degeneracije – Pod degenerisanim bazičnim planom podrazumeva se onaj plan kod koga su neke od bazičnih promenljivih jednake nuli, tj. u degenerisanom planu broj pozitivnih promenljivih je manji od (m+n-1).

2. Matematička definicija TP

U datih m mesta proizvodi se jedan proizvod u količinama $a_1, a_2, ..., a_m$ jedinica. Ovaj proizvod treba dostaviti u n punktova, kojima je potreban u količinama $b_1, b_2, ..., b_n$. Neka je cena prevoza jedinice proizvoda iz i-tog mesta u j-ti punkt c_{ij}, a odgovarajuća količina koja se prevozi je x_{ij} (i=1,2,...,m i j=1,2,,...n).

Uslovi problema se mogu prikazati u **tabeli 1.**

	punktovi (odredišta) →					
mesta (ishodišta) ↓	B_1	B_2	B_3	...	B_n	a_i (ponuda ishodišta)
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	...	c_{3n} x_{3n}	a_3
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j (potrebe odredišta)	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum b_j = \sum a_i$

a) Problem se može postaviti na sledeći način:

Treba odrediti vrednosti nenegativnih promenljivih:

x_{ij} (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n)

koje za ishodišta zadovoljavaju jednačine:

$x_{11}+...+x_{1n} = a_1$

....

$x_{m1}+...+x_{m\,n} = a_m$

a za odredišta jednačine:

$x_{11}+...+x_{m1} = b_1$

....

$x_{1n-1}+...+x_{m\,n-1} = b_{n-1}$

$x_{1n} +...+x_{m\,n} = b_n$

tako da f-ja cilja:

$c_{11}\, x_{11}+...+c_{1n}\, x_{1n}+$

....

$c_{m1}\, x_{m1}+...+c_{m\,n}\, x_{m\,n}$

ima minimum.

Pošto su uslovne jednačine linearne, a kako je i f-ja cilja linearna s obzirom na sve promenljive, vidi se da je reč o problemu linearnog programiranja. Zatim, zbog jednakosti ponude svih ishodišta i potreba svih odredišta, uslovne jednačine čine sistem zavisnih linearnih jednačina.

b) Problem se može postaviti i na drugi način:

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+...+x_{in} = a_i \qquad (i=1,2,..,m) \qquad (1)$$

$$x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+...+x_{nj} = b_j \qquad (j=1,2,..,n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \,(i=1,2,...,m \quad j=1,2,...n)$$

Prvih m jednačina pokazuje da iz svakog mesta proizvodnje izlazi cela proizvodnja posmatranog proizvoda. Drugih n jednačina pokazuje da svaki punkt uzima sve njemu potrebne količine.

Opšti zbir troškova prevoza je:

$$\textbf{(min) f} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{sj}\, X_{ij} \qquad (2)$$

funkcija (f) se naziva - *funkcija cilja*

D**opunski uslov**, koji znači zahtev da je ukupan obim proizvodnje u svim mestima proizvodnje jednak ukupnoj tražnji svih punktova zajedno, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3)$$

uslov (2) je zadovoljen ako je: $x_{ij}=\dfrac{a_i b_j}{\sum a_i}$

Vidimo da u sistemu (1) imamo m+n jednačina sa m+n promenljivih, ali ovih m+n jednačina nisu nezavisne zbog uslova (3), već samo m+n-1 jednačina je nezavisno i to:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum a_i = \sum b_j \qquad \textit{jedna jednacina}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad m-1 \ \textit{jednacina}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad n-1 \ \textit{jednacina}$$

Znači, jedno bazno rešenje mora imati bar:

N-M=m n - (m+n-1)=(m-1)(n-1) promenljivih koje su = 0

c) TP se može postaviti na sledeći način:

$$\textbf{(min) f} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{sj} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \text{za i=1,2,..,m i j=1,2,...,n}$$

$$\mathbf{x_{ij} \geq 0}$$

Jednačine (1) se mogu napisati u matričnom obliku:

A x = B

(min) f = C x

gde je:

$C = c_{11}\ c_{12}...c_{1n}\ c_{21}\ c_{22}...c_{2n}...c_{m1}\ c_{m2}...c_{mn}$ vektor reda

Metode za nalaženje početnog baznog rešenja:

1. metoda levi gornji ili severozapadni ugao
2. metoda najveće razlike najmanjih koeficijenata
3. metoda najmanjih koeficijenata

metoda levi gornji ili severozapadni ugao - polazi se iz severozapadnog ugla (ugao gore levo) od zahteva b_1 u Tabeli 1 i poredimo ga sa raspoloživim količinama a_1. Tu mogu nastati tri slučaja:

- ako je $b_1 < a_1$, tj. ako je potrebna količina b_1 manja od praspoložive a_1,stavlja se da je $x_{11}=b_1$ i produžava se u kvadrat x_{12}, tj. nastavlja se horizontalno
- ako je $b_1 = a_1$, stavlja se da je $x_{11} = b_1$ i produžava se u kvadrat x_{22}, tj. produžava se dijagonalno
- ako je $b_1 > a_1$, stavlja se da je $x_{11} = a_1$ i produžava se u kvadrat x_{21}, tj. produžava se verikalno

metoda najveće razlike najmanjih koeficijenata - polazi se od tabele sa jediničnim troškovima, a onda se za svaku vrstu i kolonu te tabele odredi razlika izme|u dva najmanja elementa u koloni, tj. vrsti. Te razlike se upisuju u dodatnu kolonu, tj. vrstu. Postupak raspore|ivanja troškova je sledeći: traži se najveća razlika tih minimalnih elemenata, pa se u toj koloni, tj. vrsti traži najmanji koeficijent troškova i tu se raspore|uje max moguća količina robe koju treba transportovati. Postupak se ponavlja dok se ne zadovolje potrebe odredišta i izvorišta.

metoda najmanjih koeficijenata - polazi se od tabele troškova i traži se polje sa najmanjim koeficijentom troškova, pa se u to polje raspore|uje najveća moguća količina proizvoda koju dozvoljava izvorište, tj.odredište.

Metode za nalaženje optimalnog rešenja:

1. STEPING-STON
2. Modifikovana (MODI, UV) metoda - metoda potencijala

STEPING-STON metoda

Za numeričko rešavanje TP linearnog programiranja koristi se jedna dosta jednostavna metoda, posebno podesna ako broj ishodišta i odredišta nije veliki. Metodu su napravili **A.Charnes i W.W.Cooper** i nazvali je ″Steping ston metoda″. Poznata je pod nazivom ″metoda skakanja s kamena na kamen″. U suštini, ova metoda je iterativna. Prvo se na|e neko bazično rešenje, pa se iteracijama iz njega dobijaju sve bolja i bolja rešenja, sve dok se do|e do optimalnog rešenja. Zasniva se na ocenjivanju (izračunavanju) praznih polja na osnovu najbližih punih polja.

Polazna tabela je ona koja se dobija nekom od metoda za nalaženje početnog rešenja. Obično je to metoda levi gornji ili severozapadni ugao (princip smo gore objasnili). Sada se u toj tabeli odre|uju varijacije troškova za svaku moguću kombinaciju, a svaka od tih kombinacij čini zatvoren krug, tj. izlomljenu zatvorenu liniju.

Postupak nalaženja varijacija uradimo za svako slobodno polje: $\delta_{ij} = \sum c_{ij}$

Uslov optimalnosti je da je svako $\delta_{ij} \geq 0$; ako je $\delta_{ij}=0$, onda nikakva druga kombinacija ne može da promeni troškove; ako je neko $\delta_{ij}<0$, rešenje nije optimalno i traži se novi plan transporta tako što za najmanju vrednost $\delta_{ij}<0$ stavimo onu vrednost koja je manja, a nalazi se na negativnim temenima zatvorene linije putem koje je dobijeno $\delta_{ij}<0$.

PRIMER 1.

Tri preduzeća A,B,C raspolažu količinama nekog proizvoda od 100, 120 i 120t respektivno. Ovaj proizvod se šalje na 5 punktova, koja primaju 40, 50, 70, 90 i 90t respektivno.Troškovi transporta po jedinici su dati u

Tabeli 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_I
A_1	4	1	2	6	9	100
A_2	6	4	3	5	7	120
A_3	5	2	6	4	8	120
b_j	40	50	70	90	90	340

Treba odrediti plan transporta tako da ukupni troškovi prevoza 340t budu minimalni.

Rešenje:

predstavljeno u matričnom obliku, ovaj problem predstavlja linearni program od 15 promenljivih i 7 nezavisnih jednačina. Broj promenljivih je broj redova puta broj kolona (m n). Traži se minimalna f-ja cilja:

$(\min)f=4x_{11}+x_{12}+2x_{13}+6x_{14}+9x_{15}+6x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+5x_{24}+7x_{25}+5x_{31}+2x_{32}+6x_{33}+4x_{34}+8x_{35}$

sa ograničenjima:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=100$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=120$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=120$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=40$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=50$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=70$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}=90$

$x_{15}+x_{25}+x_{35}=90$ i $x_{ij} \geq 0$

Ovih 8 ograničenja nisu nezavisni, jer je raspoloživa količina jednaka potrebnim količinama, tj. ispunjen je uslov (3), tj.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

100+120+120=40+50+70+90+90=340   samo 7 ograničenja je nezavisno, jer je m+n-1=7

Moguće rešenje se najlakše dobija pomoću pravila <u>severozapadnog ugla</u>. Pravilo se sastoji u sledećem:

1) polazi se iz severozapadnog ugla (iz ugla gore levo) od zahteva b_1, tj. poredimo ga sa raspoloživim količinama a_1

- ako je $b_1 < a_1$,tj. ako je potrebna količina b_1 manja od raspoložive količine a_1, stavlja se da je $x_{11}=b_1$ i produžuje se u kvadrat x_{12}, tj. nastavlja se horizontalno
- ako je $b_1 = a_1$, stavlja se da je $x_{11}=b_1$ i produžuje se u kvadrat x_{22}, tj. produžava se dijagonalno
- ako je $b_1 > a_1$, stavlja se da je $x_{11}=a_1$ i produžava se u kvadrat a_{21}, tj. produžava se vertikalno

2) nastavlja se na isti način, korak po korak dalje od severozapadnog ugla sve dok se ne do|e do jugoistočnog ugla

Tabela 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_I
A_1	40	50	10			100
A_2			60	60		120
A_3				30	90	120
b_j	40	50	70	90	90	340

1. u I kvadrat stavimo x_{11}=40, jer se traži manje od raspoloživog ($b_1<a_1$)
2. produžavamo na x_{12} i stavljamo da je x_{12}=50, jer je još uvek tražena količina manja od preostale raspoložive
3. produžavamo na x_{13} i stavljamo x_{13}=10, ovde je zahtev veći od 10, ali je iz izvora A_1 samo toliko ostalo na raspolaganju
4. sada produžavamo vertikalno i stavljamo x_{23}=60 da bi zadovoljili traženu količinu
5. produžavamo horizontalno u x_{24} i stavljamo x_{24}=60; tako je iscrpljeno sve što je raspoloživo u izvoru A_2
6. preostale potrebe u B_4 moramo zadovoljiti iz izvora A_3, dakle produžavamo vertikalno u x_{34} i stavljamo x_{34}=30
7. produžavamo u x_{35} i stavljamo sve što je ostalo, da bi u isto vreme zadovoljili i poslednji zahtev, tj. stavljamo x_{35}=90

Na ovaj način smo dobili: $x_{11}=40;\ x_{12}=50;\ x_{13}=10;\ x_{14}=x_{15}=0$

$x_{21}=x_{22}=0;\ x_{23}=60;\ x_{24}=60;\ x_{25}=0$

$x_{31}=x_{32}=x_{33}=0;\ x_{34}=30;\ x_{35}=90$

Ovim smo dobili prvo bazično, tj. prvo moguće rešenje.

Izračunajmo ukupne troškove za ovo rešenje:

(min)f= 4x40 + 1x50 + 2x10 + 3x60 + 5x60 + 4x30 + 8x90 = 1550 NJ

Treba da potražimo novo rešenje, koje bi imalo manje ukupne troškove prevoza, ali koje će još imati bar 8 promenljivih sa vrednošću 0.

Slika 2.

40	50	10 -1	+1	
		60 +1	60 -1	
			30	90

a)   b)

40	50	10 -1		+1
		60 +1	60 -1	
			30 +1	90 -1

c)

40	50	10		
		60	60 -1	+1
			30 +1	90 -1

d)

40 -1	50	10		
+1		60 -1	60	
			30	90

e)

40	50 -1	10 +1		
	+1	60 -1	60	
			30	90

f)

40 -1	50	10 +1		
		60 -1	60 +1	
+1			30 -1	90

g)

40	50 -1	10 +1		
		60 -1	60 +1	
	+1		30 -1	90

h)

40	50	10		
		60 -1	60 +1	
		+1	30 -1	90

Na Slici 2 su date svih 8 mogućnosti za takve jedinične promene, za sve x_{ij} koje su u prvom bazičnom rešenju bile 0. Da bi se ostvarilo jeno novo rešenje, koje bi zahtevalo manje troškove, po|imo od toga da vidimo kakav bi uticaj imala jedna jedinica u slučaju 1,4 (1.red i 4.kolona). Trba povući jednu jedinicu iz 1,3 i prebaciti u 2,3 i povući jednu jedinicu iz 2,4. Ovo je promena pod a) Ova jedinična ciklična promena izaziva promenu ukupnih troškova za iznos δ_{14} koji se može lako oceniti pomoću tabele troškova (Tabela 2). Tako je:

$\delta_{14}=c_{14}-c_{13}+c_{23}-c_{24}=6-2+3-5=2$

Na sličan način se mogu oceniti i ostale vrednosti δ_{ij} .

Tako na osnovu b) imamo:

$\delta_{15}=c_{15}-c_{13}+c_{23}-c_{24}+c_{34}-c_{35}=9-2+3-5+4-8=1$

$\delta_{21}=c_{21}-c_{23}+c_{13}-c_{11}=6-3+2-4=1$

$\delta_{22}=c_{22}-c_{23}+c_{13}-c_{12}=4-3+2-1=2$

$\delta_{25}=c_{25}-c_{24}+c_{34}-c_{35}=7-5+4-8=-2$

$\delta_{31}=c_{31}-c_{34}+c_{24}-c_{23}+c_{13}-c_{11}=5-4+5-3+2-4=1$

$\delta_{32}=c_{32}-c_{34}+c_{24}-c_{23}+c_{13}-c_{12}=2-4+5-3+2-1=1$

$\delta_{33}=c_{33}-c_{34}+c_{24}-c_{23}=6-4+5-3=4$

Sada tražimo koja promena smanjuje troškove prevoza. To se vidi preko δ_{ij} koje je negativno. To je $\delta_{25}=-2$. Ali, umesto da pomerimo jednu jednicu, pomerićemo što je mogu]e više jedinica. Zbog toga, tražimo me|u odgovarajućim kvadratima najmanju količinu gde se nalazi količina (-1). To se vidi iz c) i vidi se da je kvadrat 2,4, gde se nalazi broj 60 (u 3,5 je 90). To znači, iz kvadrata 2,4 prenosimo u 2,5 količinu 60, a da bi usaglasili raspoloživost i potržnju upišemo 90 na mesto 30 u kvadrat 3,4 i 30 na mesto 90 u kvadrat 3,5. Tako da imamo novo bazično rešenje u Tabeli 4.

Tabela 4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_I
A_1	40	50	10			100
A_2			60		60	120
A_3				90	30	120
b_j	40	50	70	90	90	340

Vidi se da osnovna potražnja i raspoloživost nisu poremećeni.

Ukupni troškovi prevoza za novo bazično rešenje su:

$x_{11}=40$; $x_{12}=50$; $x_{13}=10$; $x_{14}=x_{15}=0$

$x_{21}=x_{22}=0$; $x_{23}=60$; $x_{24}=0$; $x_{25}=60$ $x_{31}=x_{32}=x_{33}=0$; $x_{34}=90$; $x_{35}=30$

biće: (min) f=4x40 + 1x50 + 2x10 + 3x60 + 7x60 + 4x90 + 8x30=1430 NJ

Sada se ponavlja postupak na Tabeli 4 kao ranije dato na Slici 2, da bi dobili novu seriju vrednosti δ_{ij}.

Slika 3.

40	50	10 -1	+1	
		60 +1		60 -1
			90 -1	30 +1

a)

b)

40	50	10 -1		+1
		60 +1		60 -1
			90	30

40 -1	50	10 +1		
+1		60 -1		60
			90	30

c)

d)

40	50 -1	10 +1		
	+1	60 -1		60
			90	30

40	50	10		
		60	+1	60 -1
			90 -1	30 +1

e)

f)

40 -1	50	10 +1		
		60 -1		60 +1
+1			90	30 -1

40	50 -1	10 +1		
		60 -1		60 +1
	+1		90	30 -1

g)

h)

40	50	10		
		60 -1		60 +1
		+1	90	30 -1

Izračunajmo δ_{ij} za 8 slobodnih promenljivih $x_{ij}=0$. Tako imamo:

$\delta_{14}=6-2+3-7+8-4=4$

$\delta_{15}=9-2+5-7=3$

$\delta_{21}=6-3+2-4=1$

$\delta_{22}=4-3+2-1=2$

$\delta_{24}=5-7+8-4=2$

$\delta_{31}=5-8+7-3+2-4=-1$

$\delta_{32}=2-8+7-3+2-1=-1$

$\delta_{35}=6-8+7-3=2$

Dobili smo da je $\delta_{31}=\delta_{32}=-1$. Uzmimo prvo δ_{31}: prenesimo najmanji broj jedinica iz kvadrata u odgovarajućem ciklusu, gde imamo (-1); vidi se da treba preneti u kvadrat 3,1 iz kvadrata 3,5 svih 30 jedinica; još treba usaglasiti potražnju i raspoloživost i na taj način dobiti novo bazno rešenje.

Tabela 5.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_I
A_1	10	50	40			100
A_2			30		90	120
A_3	30			90		120
b_j	40	50	70	90	90	340

Ukupni troškovi prevoza su:

$x_{11}=10$; $x_{12}=50$; $x_{13}=40$; $x_{14}=x_{15}=0$

$x_{21}=x_{22}=0$; $x_{23}=30$; $x_{24}=0$; $x_{25}=90$ $x_{31}=30$; $x_{32}=x_{33}=0$; $x_{34}=90$; $x_{35}=0$

biće:

(min)f=4x10 + 1x50 + 2x40 + 3x30 + 7x90 + 5x30 + 4x90=1400

Tako|e je:
δ_{14}=6-4+5-4=3
δ_{15}=9-2+3-7=3
δ_{21}=6-3+2-4=1
δ_{22}=4-3+2-1=2
δ_{24}=5-3+2-4+5-4=1
δ_{32}=2-5+4-1=0
δ_{33}=6-5+4-2=3
δ_{35}=8-5+4-2+3-7=1
Nijedna od δ_{ij} ne može više da smanji ukupne troškove prevoza, pa se zaključuje da se ne može dobiti neko bolje rešenje. Postoji još jedno ekvivalentno rešenje, pošto je δ_{32}=0. Promena u vezi δ_{32} daje rešenje u Tabeli 6.
Tabela 6.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_I
A_1	40	20	40			100
A_2			30		90	120
A_3		30		90		120
b_j	40	50	70	90	90	340

Ovo rešenje:

x_{11}=40; x_{12}=20; x_{13}=40; x_{14}=x_{15}=0
x_{21}=x_{22}=0; x_{23}=30; x_{24}=0; x_{25}=90
x_{31}=0; x_{32}=30; x_{33}=0; x_{34}=90; x_{35}=0

daje iste troškove prevoza:
(min)f= 4x40 + 1x20 + 2x40 + 3x30 + 7x90 + 2x30 + 4x90 = 1400

MODI metoda – funkcija cilja je modifikovana i u nju su uvršteni simplex množitelji

Neka imamo n otpremnih centara P_r (r=1,2,...,m) iz kojih se snabdeva n prijemnih stanica M_s (s=1,2,...,n). Neka je $a_r > 0$ obim proizvodnje centra P_r, a $b_s > 0$ tražnja centara M_s. Neka su c_{rs} transportni troškovi po jedinici proizvoda, a x_{rs} obim transporta (broj jedinica) od centra P_r do centra M_s.

Problem je - naći transportni program $x_{rs} \geq 0$ tako da ukupni transportni troškovi budu minimalni, tj.

$$\textbf{(min) f} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} C_{sr}\, X_{rs} \qquad (1)$$

pri ograničenjima:

$$\sum_{r=1}^{n} X_{rs} = a_r \qquad (r = 1,2,\ldots,m) \qquad (2)$$

$$\sum_{sr=1}^{m} X_{rs} = b_s \qquad (s = 1,2,\ldots,n) \qquad (3)$$

za $x_{rs} \geq 0$ za svako r i s.

Odnosno, pod uslovom da je ukupan obim transporta iz centra P_r u centar M_s jednak obimu proizvodnje a_r i da je obim koji primi centar M_s iz različitih centara jednak b_s, tj. ukupnoj tražnji tog mesta.

Pored uslova (1) i (2) postoji još jedan **dopunski**, koji znači zahtev da je ukupan obim proizvodnje u svim centrima P_r (r=1,2,...,m) jednak ukupnoj tražnji svih centara zajedno, tj.

$$\sum_{r=1}^{m} a_r = \sum_{s=1}^{n} b_s \qquad (4)$$

Uslov (4) je dobijen neposredno iz (2) i (3) sumiranjem po r i s, tj.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} X_{rs} &= \sum_{r=1}^{m} a_r \\ \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} X_{rs} &= \sum_{s=1}^{n} b_s \end{aligned} \qquad (5)$$

iz čega proizilazi (4)

Uslovi (2) i (3) se pišu u razvijenom obliku kao:

$$\begin{array}{lllll} x_{11}+x_{12}+...+x_{1n} & & & & =a_1 \\ & x_{21}+x_{22}+...+x_{2n} & & & =a_2 \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \\ & & & x_{m1}+x_{m2}+...+x_{mn} & =a_m \\ & & & & \\ x_{11} & +x_{21} & & +x_{m1} & =b_1 \\ \quad x_{12} & \quad +x_{22} & & \quad +x_{m2} & =b_2 \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \\ \qquad x_{1n} & \qquad +x_{2n} & & \qquad +x_{mn} & =b_n \end{array}$$

Uslov (2) i (3) se tako|e mogu izraziti pravouglom šemom:

Tabela 1

x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}	a_1
x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}	a_2
....	....	....		
x_{m1}	x_{m2}	....	x_{mn}	a_m
b_1	b_2	....	b_n	

Poslednja kolona (total) označava desne strane prvih jednačina, tj. obim proizvodnje pojedinih proizvoda, a poslednja vrsta desne strane preostalih n jednačina, tj. ukupnu tražnju pojedinih centara.

1. **PRIMER**

imamo sistem od 2 preduzeća i 3 distributivna mesta, tj.

$$\begin{array}{llll} x_{11}+x_{12}+x_{13} & & & =50 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23} & & =150 \\ \multicolumn{4}{l}{-------------------------} \\ x_{11} & x_{21} & & =30 \\ \quad x_{12} & \quad +x_{22} & & =90 \\ \qquad x_{13} & \qquad +x_{23} & & =80 \end{array}$$

Napisano u obliku tabele:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	50
x_{21}	x_{22}	x_{23}	150
30	90	80	200

ukupan broj jednačina je **m+n**=5 sa **m n**=6 promenljivih; broj linearno nezavisnih jednačina je **m+n-1**=4 sa isto toliko baz̆ičnih promenljivih.

Znači, ograničavajući uslovi (2), (3) i (5) predstavljaju sistem od m+n jednačina sa m n promenljivih. Me|utim, u TP sve jednačine nisu nezavisne. Postoji svega m+n-1 nezavisnih jednačina, što znači da je jedna jednačina posledica ostalih, što se lako može dokazati. Pošto broj baz̆ičnih promenljivih ne može biti veći od broja nezavisnih jednačina, to je baza TP sastavljena od m+n-1 promenljivih.

Tako|e se može dokazati da su sve baze TP trouglastog oblika (vidi Gausov postupak).

<u>Odre|ivanje početnog baz̆ičnog rešenja:</u>

Svaki problem LP, pa i TP počinje odre|ivanjem početnog baz̆ičnog rešenja. Do optimalnog rešenja se dolazi nizom iteracija, kao i kod klasičnog problema LP.

Postoji više metoda za odre|ivanje početnog baz̆ičnog rešenja:

- jedna od prvih metoda je ″dijagonalna metoda″ ili ″metoda severozapadnog ugla″ (North-West Corner Rule); ne uzimaju se u obzir cene prevoza, pa je dobijeno baz̆ično rešenje obično dosta udaljeno od optimalnog

Druge metode su pokušale da dodju do početnog baz̆ičnog rešenja koje je bliže optimalnom rešenju; to su:

- metoda najmanje cene
- VAM (Vogelova metoda) - naziv čine početna slova reči u nazivu Vogel's Approximation Method; ova metoda je najsloženija, ali se dobija plan bliži optimalnom nego što se dobija drugim metodama; preporučuje se kod ručnog rešavanja TP.

Odre|ivanje početnog baz̆ičnog rešenja za MODI metodu:

Odre|uje se prema transportnim troškovima po jedinici c_{rs}. Za najmanje c_{rs} odabere se odgovarajuća promenljiva x_{rs} (r=1,2,...,m; s=1,2,...,n) sa vrednošću koja ne prelazi manji od totala a_r ili b_s u poslednjoj koloni, tj. vrsti Tabele 1. Znači, izbor baz̆ične promenljive je uslovljen minimalnim transportnim troškovima po jedinici c_{rs}, a vrednost promenljive odre|uje se prema:

$$x_{ij}=\min(a_r, b_s) \quad (r=1,2,...,m \qquad s=1,2,...,n) \qquad (6)$$

indeksima (i,j) je označena baz̆ična promenljiva. Time je odre|ena jedna baz̆ična promenljiva, a za početno baz̆ično rešenje potrebno je odrediti m+n-1 promenljivih. Istim postupkom se odre|uju ostale baz̆ične promenljive, pod uslovom da se totali a_r i b_s posle svakog izbora promenljivih menjaju. Nastavljajući postupak m+n-1 put odre|ujemo početno baz̆ično rešenje, s tim što se mora voditi računa o izbilansiranim vrstama i kolonama.

2. **PRIMER**

3 preduzeća elektronske ind. žele da odrede optimalni transportni program za jednu vrstu TV (isti kvalitet, iste cene) za 4 različita mesta; neka je nedeljna proizvodnja 1 preduzeća a_1=200, za 2 je a_2=100 i za 3 je a_3=300 TV; odgovarajuća tražnja za I mesto je b_1=220, za II je b_2=130, za III je b_3=180 i za IV je b_4=70 TV; transportni troškovi po jednom TV dati su tabeli (u hiljadama dinara) u desnom donjem uglu (npr. transportni troškovi od 1 do I su 1000 dinara, do II su 3000 dinara, do III su 0 i do IV su 4000 dinara po TV).

Tabelarno:

	I	II	III	IV	total
1	1	3	0	4	200
2	1	2	3	1	100
3	3	1	4	2	300
total	220	130	180	70	600

Treba odrediti takav TP za koji će ukupni transportni troškovi biti minimalni.

Rešenje:

najniži trošak je c_{13}=0, a neki jednaki su: c_{11}=c_{21}=c_{32}=1. za bazične promenljive treba izabrati one za koje su troškovi po jedinici minimalni, što znači da ovde za bazične promenljive treba izabrati x_{13}, x_{11}, x_{21}, x_{32} i x_{22} ili x_{33}. Znači, treba odrediti 6 promenljivih, jer je m+n-1=3+4-1=6. Kada smo rekli da za bazično rešenje treba uzeti promenljive sa minimalnim c_{rs}, to nije lako postići (videli smo x_{22} ili x_{33}), ali taj izbor nema uticaja na optimalno rešenje, nego samo na broj iteracija (veći ili manji broj, tj. brže ili sporije dolaženje do optimalnog rešenja).

Po|imo od toga da odredimo početno bazično rešenje ne uzimajući striktno one promenljive za koje je c_{rs} minimalno:

uzmimo da je x_{11}=200; time eliminišemo 1. vrstu, tj. sve promenljive u njoj. U 1. koloni ostaje 20, jer je b_1-a_1=220-200=20. Eliminišemo 1. kolonu jer uzimamo da je x_{31}=20. Time total u 3. vrsti a_r=300 smanjujemo za 20, tj. a_3-x_{31}=300-20=280. Sada eliminišimo 2.kolonu sa x_{32}=130. Sada je total (a_3-x_{31})-x_{32}=280-130=150. Eliminišemo 4.kolonu stavljajući da je x_{34}=70. sada je total u poslednjoj vrsti a_3=80. Stavljajući da je x_{33}=80 eliminišimo 3.vrstu, jer je a_3=x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} dok je u 3.koloni ostala razlika b_3-80=100. na kraju, stavljajući da je x_{23}=100 eliminišemo 3.kolonu i 2.vrstu. Ovako smo odredili početno bazično rešenje sa izbalansiranim vrstama i kolonama, tj.

x_{11}=200, x_{23}=100, x_{31}=20, x_{32}=130, x_{33}=80, x_{34}=70

Tabela 3.

1 200	3	0	4	200
1	2	3 100	1	100
3 20	1 130	4 80	2 70	300
220	130	180	70	

Ukupni transportni troškovi za ovaj program su:

$$f=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} C_{sr}\, X_{rs} = 1x200+3x100+3x20+1x130+4x80+2x70=1150$$

<u>Odre|ivanje simplex množitelja:</u>

Simplex množitelji se odre|uju da bi se ispitali uslovi optimalnosti, tj. uslovi za promenu bazičnog rešenja.

Označimo sa $\mathbf{u_r}$ i $\mathbf{v_s}$ množitelje r-te i s-te jednačine sistema (5). Ako svaku j-nu sistema pomnožimo odgovarajućim množiteljem i dodamo funkciji kriterijuma, dobijamo sledeći modificirani oblik funkcije kriterijuma:

$$\sum_{r,s}(C_{rs}+U_r+V_s)X_{rs} = f+\sum_{r=1}^{m}a_rU_r+\sum_{s=1}^{n}b_sV_s \tag{7}$$

ili: $\sum_{r,s} C'_{rs} X_{rs} = f + f_\theta$

gde smo stavili:

$c'_{rs}=c_{rs}+u_r+v_s$ $\quad$ r=1,2,..,m; s=1,2,..,n $\quad$ (8)

$f_\theta=\sum_r a_r U_r + \sum_s b_s V_s$

Odredimo vrednosti u_r i v_s tako da koeficijenti za bazične promenljive postanu jednaki 0, tj.:

$c_{rs}+u_r+v_s=0$ za bazične promenljive x_{rs} $\quad$ (8a)

Pošto su nebazične promenljive tako|e jednake 0, izraz (7) postaje:

$f=- f_\theta= - (\sum_r a_r U_r + \sum_s b_s V_s)$

odakle se za poznato u_r i v_s može odrediti vrednost f-je kriterijuma.

Izraz (ba) je sistem od m+n-1 jednačina sa isto toliko promenljivih u_r i v_s (simplex množitelja). Matrica sistema (8a) je transponovana matrica baznčnog sistema za koju smo pokazali da je trouglastog oblika. To znači da se množitelji u_r i v_s lako odre|uju kada se stavi da je jedan od njih jednak 0.

Kada se odrede množitelji, lako se izračunavaju koeficijenti c'_{rs} prema (8), za nebazične promenljive, odakle dolazimo do <u>kriterijuma optimalnosti</u> za (min)f u obliku:

$\mathbf{c'_{rs} \geq 0}$ **ili** $\mathbf{c'_{rs}=c_{rs}+u_r+v_s \geq 0}$ **za svako r i s** $\quad$ **(8b)**

znači, ako je za odre|eno bazično rešenje uslov (8b) zadovoljen, rešenje je optimalno sa minimalnim transportinim troškovima.

Ako je $\mathbf{c'_{rs} < 0}$ za jednu ili vi[e nebazičnih promenljivih, nova bazična promenljiva se odre|uje prema minimalnoj vrednosti $\mathbf{c'_{rs} < 0}$. Znači, izbor nove bazične promenljive x_{rs} je odre|en prema uslovu:

$\mathbf{c'_{rs} = \min_{r,s} c'_{rs} < 0}$ $\quad$ (9)

ili:

$\mathbf{c'_{rs} =\min_{r,s} (c_{rs}+u_r+v_s) < 0}$ $\quad$ **za nebazične promenljive**

Uvo|enje nove promenljive u bazu dovodi do eliminisanja jedne od bazičnih promenljivih. To se radi tako što se u polje (p,q) za koje je odre|eno najmanje $\mathbf{c'_{rs}< 0}$ stavi neodre|eni broj θ. Onda se u vrsti i koloni u kojoj se nalazi polje (p,q) vrši bilansiranje, tj. oduzima ili dodaje θ bazičnim promenljivim u drugim poljima, gde je to potrebno.

Pokažimo to na gornjem primeru:

u vrsti ili koloni u kojoj se nalazi najveći broj bazičnih promenljivih (Tabela 3) stavi se jedan od množitelja u_r ili v_s jednak 0. To je 3.vrsta, te stavljamo $u_3=0$. Prema (8a) imamo $c_{3s}+v_s=0$, tj. $v_s=-c_{3s}$. Odakle proizilazi da su množitelji v_s jednaki koeficijentima troškova (3.vrste) sa promenjenim znakom, tj.:

$v_1=-3,\ v_2=-1,\ v_3=-4,\ v_4=-2$

ove se vrednosti beleže u poslednjoj vrsti u odgovarajućim poljima Tabele 4. Kad se imaju vrednosti množitelja v_s lako je odrediti množitelje u_1 i u_2 ($u_3=0$). za promenljivu x_{11} (1.vrsta) sa koeficijentom $c_{11}=1$ imamo:

$c_{11}+u_1+v_1=1+u_1-3=0$, tj. $u_1=2$

isto tako (2.vrsta) se odre|uju množitelji u_2 za promenljivu x_{23}, tj.:

$c_{23}+u_2+v_3=3+u_2-4=0$,tj. $u_2=1$

Tabela 4.

1 200-θ	3	0 θ	4	2 200
1	2	3 100	1	1 100
3 20+θ	1 130	4 80-θ	2 70	0 300
-3 220	-1 130	-4 180	-2 70	

Kada su odre|eni simplex množitelji koristi se j-na (8) za odre|ivanje koeficijenata $\mathbf{c'_{rs}}$ prema kojima se utvr|uje da li je bazično rešenje optimalno. Ako su svi $\mathbf{c'_{rs} \geq 0}$ za nebazične promenljive, rešenje je optimalno. Ako me|u koeficijentima $\mathbf{c'_{rs}}$ ima negativnih, rešenje nije optimalno. Promena bazičnih promenljivih se vrši tako što se nebazična promenljiva za koju je $\mathbf{c'rs < 0}$ minimalno unosi u bazu, pa je:

$c'_{13}=0+2-4=-2$

$c'_{21}=1+1-3=-1$

Ostali koeficijenti za nebazične promenljive su pozitivni. Pošto je $c'_{13}<0$ minimalno, to se za novu bazičnu promenljivu uzima x_{13}. U polje (1,3) se stavi pozitivan neodre|en broj θ. Izbalansiramo 1.vrstu i 3.kolonu oduzimanjem θ od vrednosti bazičnih promenljivih u poljima (1,1) i (3,3).

Ostaje da se izbalansiraju 1.kolona i 3.vrsta, tako što se promenljivoj x_{31} doda neodre|eni broj θ. Time je krug zatvoren i tabela je ponovo u ravnoteži (zbir promenljivih po vrstama i kolonama jednak je odgovarajućim totalima).

Nova bzaična promenljiva se odre|uje tako što se manji od izraza (200-θ) i (80-θ) izjednači sa 0, tj. 80-θ=0, θ=80. Time je odre|ena nova bazična promenljiva $x_{13}=80$, a eliminisana je promenljiva $x_{33}=0$. Dodavanjem i oduzimanjem θ=80 promenljivim sa θ dolazimo do novog bazičnog rešenja (Tabela 5).

Tabela 5.

1 120	3	0 80	4	2 200
1	2	3 100	1	1 100
3 100	1 130	4	2 70	0 300
220	130	180	70	

Novo bazično rešenje je: $x_{11}=120$, $x_{13}=80$, $x_{23}=100$, $x_{31}=100$, $x_{32}=130$, $x_{34}=70$

Za ovaj transportni program ukupni troškovi su:

f=1x120+0x80+3x100+3x100+1x130+2x70=990

Znači, posle prve iteracije tran. troškovi su smanjeni sa 1150 na 990, tj. za 160 hiljada dinara.

Postupak se ponavlja na sledeći način:

u vrsti ili koloni u kojoj se nalazi najveći broj bazičnih promenljivih (Tabela 5) stavi se jedan od množitelja u_r ili v_s jednak 0. To je 3.vrsta, te stavljamo $u_3=0$. Prema (8a) imamo $c_{3s}+v_s=0$, tj. $v_s=-$

c_{3s}. Odakle proizilazi da su množitelji v_s jednaki koeficijentima troškova (3.vrste) sa promenjenim znakom, tj.:

v_1=-3, v_2=-1, v_4=-2

preko v_1 odre|eno je u_1=2; preko u_1 odre|eno je v_3, tj. 0+2+v_3=0, v_3=-2; preko v_3 odre|eno je u_2=-1. Kada su odre|eni simplex množitelji koristi se j-na (8) za odre|ivanje koeficijenata $\mathbf{c'_{rs}}$ prema kojima se utvr|uje da li je bazično rešenje optimalno. Ako su svi $\mathbf{c'_{rs} \geq 0}$ za nebazične promenljive, rešenje je optimalno. Ako me|u koeficijentima $\mathbf{c'_{rs}}$ ima negativnih, rešenje nije optimalno. Promena bazičnih promenljivih se vrši tako što se nebazična promenljiva za koju je $\mathbf{c'_{rs} < 0}$ minimalno unosi u bazu, pa je:

c'_{21}=-3 c'_{24}=-2

U odgovarajuće polje, tj. (2,1) stavljamo θ, posle čega je uspostavljena ravnoteža u 1.koloni i 2.vrsti oduzimanjem θ od vrednosti promenljivih u poljima (1,1) i (2,3). Najzad, dodavanjem θ promenljivoj u polju (1,3) uspostavlja se ravnoteža (Tabela 6).

Tabela 6.

1 120-θ	3	0 80+θ	4	2 200
1 θ	2	3 100-θ	1	1 100
3 100	1 130	4	2 70	0 300
-3 220	-1 130	-2 180	-2 70	

Vrednost θ se odre|uje iz polja 100-θ=0, tj. θ=100. Time je eliminisana promenljiva x_{23}, a u bazu uneta promenljiva x_{21} sa vrednošću 100. Zamenom θ u poljima gde ono još figurira dolazimo do novog bazičnog rešenja (Tabela 7).

Tabela 7.

1 20	3	0 180	4	2 200
1 100	2	3	1	1 100
3 100	1 130	4	2 70	0 300
-3 220	-1 130	-2 180	-2 70	

Znači, novo bazično rešenje je: x_{11}=20, x_{13}=180, x_{21}=100, x_{31}=100, x_{32}=130, x_{34}=70

Za ovaj transportni program ukupni troškovi su:

f=1x20+0x180+1x100+3x100+1x130+2x70=690

Znači, posle prve iteracije transp. troškovi su smanjeni s 1150 na 990, tj. za 300 hiljada dinara.

Da li je dobijeni program optimalan?

Pošto su koeficijenti c'_{rs} za nebazične promenljive pozitivni, to ne postoji drugi program koji bi imao niže transportne troškove. Znači, dobijeno rešenje je optimalno za min transportnim troškovima f=690.