Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

Pod zahtevom ispitati funkciju $y = f(x)$, obično se podrazumevaju sledeći postupci:

- Odrediti oblast definisanosti funkcije $\mathscr{D}(f)$
- Ispitati specijalna svojstva funkcije (parnost, periodičnost)
- Ispitati ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti, tj. odrediti asimptote grafika funkcije, ako postoje
- Odrediti nule i znak funkcije
- Naći prvi i drugi izvod funkcije
- Odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstremume
- Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti i prevojne tačke funkcije
- Odrediti sve ostale specifičnosti grafika date funkcije, a zatim nacrtati njen grafik

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

Primer 0.1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$

- Domen funkcije je skup $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- Funkcija nije ni parna ni neparna
- Vertikalna asimptota je $x = 1$ jer je

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty.$$

- Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ jer je

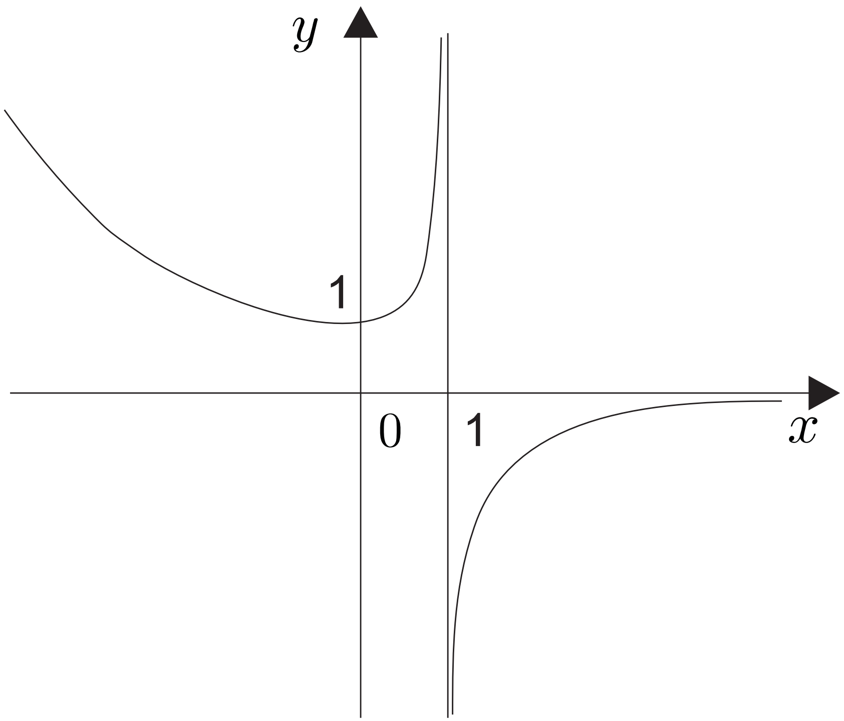
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = 0$$

- Na levom kraju intervala definisanosti $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-x} = +\infty$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Funkcija nema nula
- Prvi izvod je $f'(x) = e^{-x} \frac{x}{(1-x)^2}$
- Tačka $A(0,1)$ je tačka minimuma funkcije
- Funkcija raste na intervalima $(0,1) \cup (1,+\infty)$, a opada na $(-\infty,0)$
- Drugi izvod je $f''(x) = e^{-x} \frac{1+x^2}{(1-x)^3}$
- Nema prevojnih tačaka, ali je konveksna na $(-\infty,1)$ a konkavna na $(1,+\infty)$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije



Sl. 1: Funkcija $y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

Primer. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$

- Domen funkcije je skup $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Funkcija nije ni parna ni neparna
- Vertikalna asimptota je $x = 0$ jer važi

$$\lim_{x \to 0+0} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x \to 0-0} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

- Funkcija nema horizontalnu asimptotu jer je

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = \pm\infty$$

- Funkija ima nulu $x = 2$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

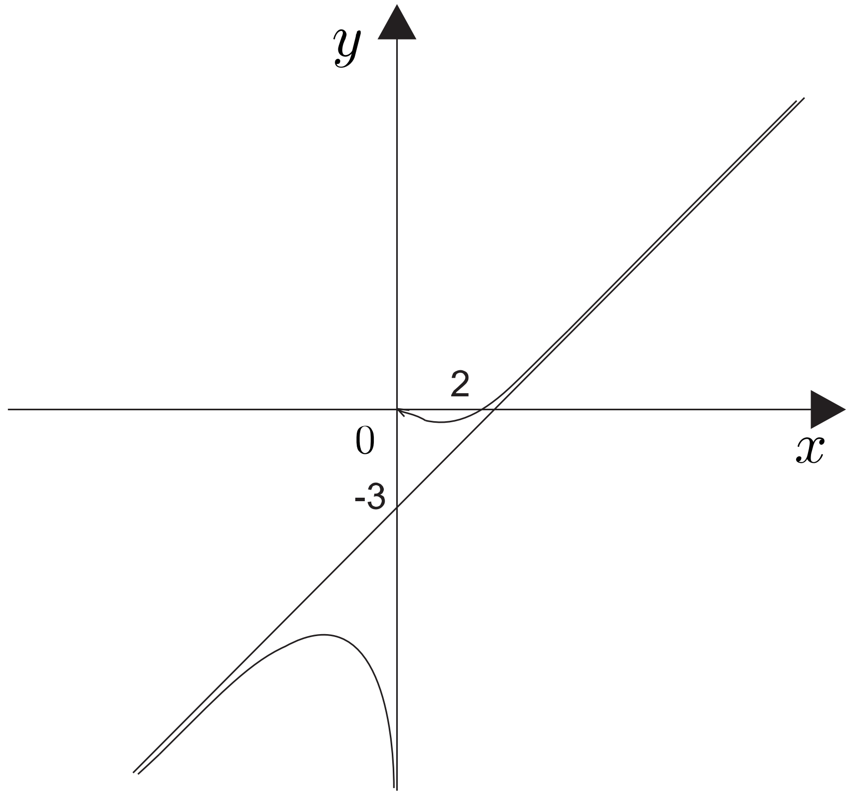
- Kosa asimptota je $y = x - 3$ kada $x \to \pm\infty$
- $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 1$$
- $$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}} - x \right) =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(1 - e^{\frac{1}{x}}) - 2}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot (-x) - 2}{e^{\frac{1}{x}}} = -3$$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Prvi izvod je $f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$
- Funkcija raste na $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, a opada na $(-2, 0) \cup (0, 1)$
- Drugi izvod je $f''(x) = \frac{5x-2}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$
- Pošto je $f''(-2) < 0$ i $f''(1) > 0$, funkcija ima maksimum u tački $A(-2, -4e^{\frac{1}{2}})$ i minimum u tački $B(1, -e^{-1})$
- Tačka prevoja je $C(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$
- Funkcija je konkavna na $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{2}{5})$, a konveksna na $(\frac{2}{5}, +\infty)$. $\diamond$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije



Sl. 2: Funkcija $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.
- Domen funkcije je $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- Funkcija nema realnih nula jer jednačina $x^2 - 2x + 2 = 0$ nema realnih nula, pošto je njena diskriminanta negativna, tj. $D = b^2 - 4ac = -4$
- Tačka prekida je $x = 1$
- Pošto je $f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$, $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$ pa funkcija nije ni parna ni neparna.

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Stacionarne tačke se dobijaju rešavanjem jednačine $y' = \dfrac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} = 0$, tj. $x = 0$ ili $x = 2$.
- Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ znak prvog izvoda je $y' > 0$ pa je funkcija rastuća, a za $x \in (0,1) \cup (1,2)$ znak je $y' < 0$ pa je funkcija opadajuća.
- Tačka $M(0,-2)$ je tačka lokalnog maksimuma funkcije, a $N(2,2)$ je tačka njenog lokalnog minimuma.
- Drugi izvod funkcije $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ je različit od nule na njenoj celoj oblasti definisanosti.
- Funkcija je konkavna na intervalu $(-\infty, 1)$ a konveksna na $(1, +\infty)$.

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Kako je $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = -\infty$,

prava $x=1$ je vertikalna asimptota funkcije.

- Funkcija nema horizontalnih asimptota jer je

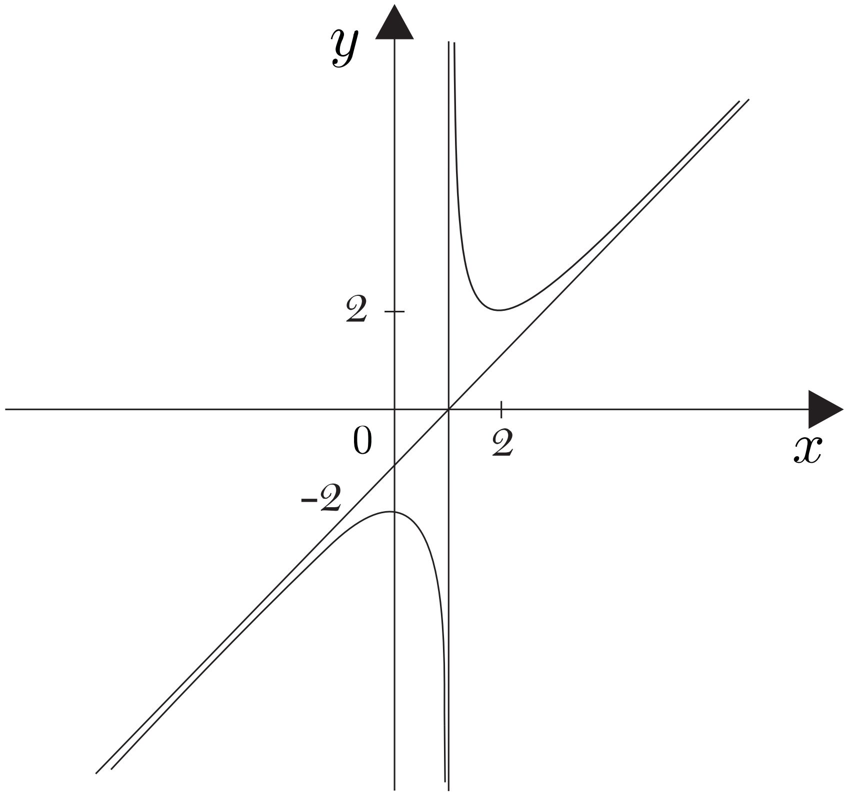
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = -\infty.$$

- Pošto je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x} = 1$ i

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} - x = -1$, prava $y = x-1$

je i leva i desna asimptota funkcije.

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije



Sl. 3: Funkcija $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y = \dfrac{x^4+3}{x}$.
- Domen funkcije je $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
- Funkcija nema realnih nula jer jednačina $x^4+3=0$ nema realnih nula, pa nema preseka grafika funkcije sa x osom.
- Tačka prekida funkcije je $x=0$.
- Pošto je $f(-x) = \dfrac{(-x)^4+3}{-x} = -\dfrac{x^4+3}{x} = -f(x)$, funkcija je neparna.

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Rešavanjem jednačine $y' = 0$ tj. $\dfrac{3x^4 - 3}{x^2} = 0$, dobijaju se stacionarne tačke $x = -1$ ili $x = 1$.
- Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ znak prvog izvoda je $y' > 0$ pa je funkcija rastuća, a za $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ znak je $y' < 0$ pa funkcija opada.
- Tačka $M(-1, -4)$ je tačka lokalnog maksimuma funkcije, a $N(1, 4)$ je tačka njenog lokalnog minimuma.
- Drugi izvod funkcije $y'' = \dfrac{6x^4 + 6}{x^3}$ je različit od nule u celoj oblasti definisanosti funkcije, jer jednačina $6x^4 + 6 = 0$ nema realnih rešenja.
- Funkcija je konkavna na intervalu $(-\infty, 0)$ a konveksna na $(0, +\infty)$.

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije

- Kako je $\lim_{x\to 0+0} \frac{x^4+3}{x} = +\infty$ i $\lim_{x\to 0-0} \frac{x^4+3}{x} = -\infty$, prava $x = 0$ je
vertikalna asimptota funkcije.

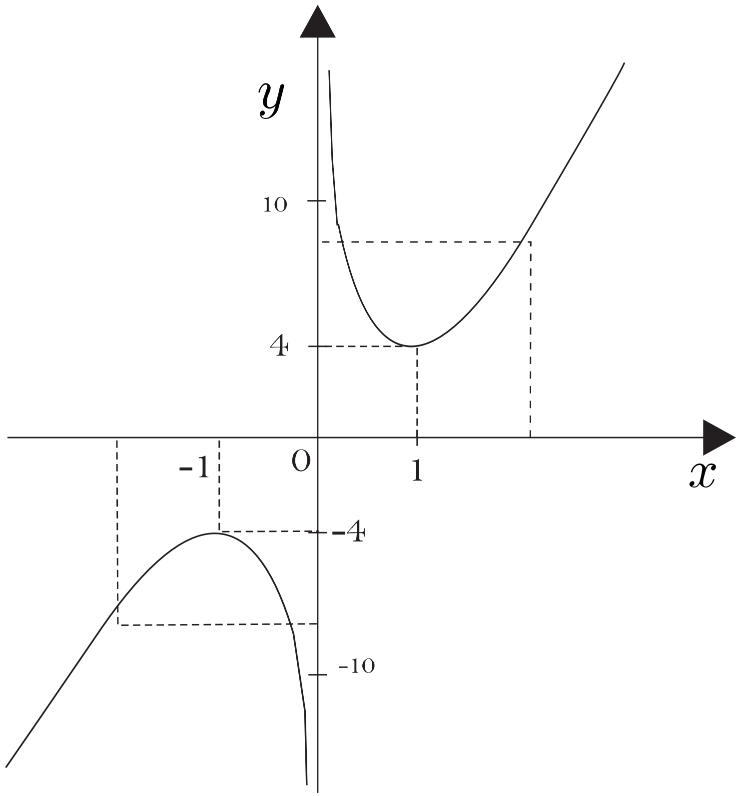
- Funkcija nema horizontalnih asimptota jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{1} = +\infty \quad \text{i}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+3}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3}{1} = -\infty.$$

- $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^4+3}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+3}{x^2} = +\infty$, pa
funkcija nema kosih asimptota.

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije



Sl. 4: Funkcija $y = \dfrac{x^4+3}{x}$