ANALIZA TOKA RACIONALNE FUNKCIJE I CRTANJE GRAFIKA

Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije :

1) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$, 2) $y=\frac{2x^3}{(x-2)^2}$, 3) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$, 4) $y=\frac{x^3}{x^2+12}$, 5) $y=\frac{(1-x)^3}{2x^2}$,

6) $y=\frac{(x-2)^3}{3(x+2)^2}$, 7) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$, 8) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$, 9) $y=\frac{6x-x^2-9}{x-2}$, 10) $y=\frac{3x-x^2}{x-4}$,

11) $y=\frac{x^2+3x}{x+4}$, 12) $y=\frac{x^2+4x-4}{x-1}$, 13) $y=\frac{x^2-3x-10}{x+3}$, 14) $y=\frac{x^2+4x-5}{x-3}$,

15) $y=\frac{x^2+5x-6}{x-2}$, 16) $y=\frac{-x^2-x+2}{x-2}$, 17) $y=\frac{2x-x^2+3}{x+2}$, 18) $y=\frac{5x-x^2-6}{x+1}$,

19) $y=\frac{x-x^2-2}{x-2}$, 20) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$, 21) $y=\frac{x^2-4}{1-x^2}$, 22) $y=\frac{x^2-6x+8}{x^2-2x+1}$,

23) $y=\frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$, 24) $y=\frac{x^2+3x}{(x+4)^2}$, 25) $y=\frac{2x^2-1}{(x-1)^2}$, 26) $y=\frac{x^2+3x}{(x+1)^2}$,

27) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, 28) $y=\frac{x^2-2}{(x-2)^2}$, 29) $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$, 30) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$, 31) $y=\frac{x^2-1}{5x^2+3x}$,

32) $y=\frac{x^2}{x^2-3}$, 33) $y=\frac{x^2-2}{(x-2)^2}$, 34) $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$, 35) $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ 36) $y=\frac{x-2}{x^2-2x-3}$

37) $y=\frac{x+3}{x^2+x+3}$, 38) $y=\frac{5-x}{9-x^2}$, 39) $y=\frac{3x^2-1}{x^3}$, 40) $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, 41) $y=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$,

42) $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

REŠENI ZADACI

1. $y = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}$. **1) Oblast definisanosti:** Kako deljenje nulom nije definisano, racioanlna funkcija nije definisana za one vrednosti za koje je izraz u imeniocu (ispod razlomačke crte) jednak nuli. $x - 3 = 0$ za $x = 3$. Dakle $Df = \{x \in R | x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2) Nule funkcije i presek sa *y* osom. Vrednosti argumenta x za koje je funkcija jednaka nuli, nazivaju se nule funkcije (presek sa x osom). Racionalna funkcija je jednaka nuli za one vrednosti za koje je izraz u brojiocu (iznad razlomačke crte) jednak nuli. $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$. Izraz u brojiocu je kvadratna funkcija. Nule kvadratne funkcije se dobijaju rešavanjem kvadratne jednačine. Opšti oblik kvadratne jednačine je $ax^2 + bx + c = 0$. Rešenja se dobijaju po sledećem obrascu $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ako je diskriminanta $D = b^2 - 4ac > 0$, jednačina ima dva rešenja, ako je $D = 0$, jednačina ima jedno rešenje, a ako je $D < 0$, jednačina nema rešenja.

U ovom primeru je $D = 16 + 20 = 36$, pa jednačina ima dva rešenja $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$.

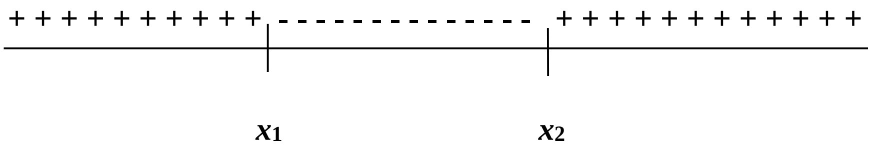
$x_1 = \dfrac{-4 + 6}{2} = 1$, a $x_2 = \dfrac{-4 - 6}{2} = -5$. To znači da ova funkcija ima dve nule, odnosno **dva preseka sa *x* osom *N*₁(1, 0)** i **$N_2(-5, 0)$**.

Presek sa y osom se dobija kad se za vrednost argumenta x uzme nula i izračuna vrednost funkcije.

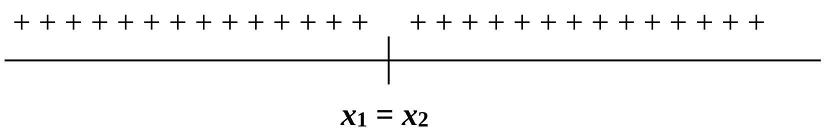
$x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-5}{-3} = \dfrac{5}{3}$. **Presek sa *y* osom je tačka *M*(0, 5/3)**.

3) Znak funkcije. Znak kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ zavisi od znaka konstante a.

Ako je ***a* > 0** i ***D* > 0**, $y > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, a $y < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$.



Ako je ***a* > 0** i ***D* = 0,** jednačina ima samo jedno rešenje i kvadratna funkcija je pozitivna za svako x iz oblasti definisanosti, osim za rešenje $x_1 = x_2$.



Ako je ***a* > 0** i ***D* < 0,** jednačina nema rešenje, pa kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ nema presek sa x osom i $y > 0$ za svako x iz oblasti definisanosti.

Ako je ***a* < 0** i ***D* > 0**, $y > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$, a $y < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \bigcup (x_2, +\infty)$.

- - - - - - - - - - - - - - + + + + + + + + + + - - - - - - - - - - - - - - -

x_1 x_2

Ako je ***a* < 0** i ***D* = 0,** jednačina ima samo jedno rešenje i kvadratna funkcija ima negativan znak za svako x iz oblasti definisanosti, osim za rešenje $x_1 = x_2$.

- | -

$x_1 = x_2$

Ako je ***a* < 0** i ***D* < 0,** jednačina nema rešnje, pa kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ nema presek sa x osom i $y < 0$ za svako x iz oblasti definisanosti.

U našem primeru znak određujemo na sledeći način:

$x^2 + 4x - 5$: + + + + + + + | – – – – – – – – – – | + + + + + + + +

-5 1

$x - 3$: – | + + + + +

3

$\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}$: - - - - - - - - | + + + + + + | - - - | + + + + +

-5 1 3

Dakle $y > 0$ za $x \in (-5,1) \bigcup (3,+\infty)$, a $y < 0$ za $x \in (-\infty,-5) \bigcup (1,3)$.

4) **Asimptote.**

Ako funkcija nije definisana u tački a, funkcija ima u toj tački **vertikalnu asimptotu** ukoliko važi

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ i/ili $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

U našem slučaju funkcija nije definisana u $a = 3$. Ispitaćemo kakve vrednosti funkcija dobija u okolini te tačke.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3} = \begin{pmatrix} x = 3 + h \\ h > 0, h \to 0 \end{pmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 + 4(3+h) - 5}{3 + h - 3} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 12 + 4h - 5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 10h + 16}{h} = \frac{16}{0} = +\infty.$$

Za određivanje granične vrednosti upotrebili smo smenu $x = 3 + h$, gde je h mala pozitivna veličina koja teži nuli. Na osnovu dobijene granične vrednosti, zaključujemo da kad x teži ka 3 sa desne strane funkcija teži $+\infty$.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+4x-5}{x-3}=\begin{pmatrix} x=3-h \\ h>0, h\to 0\end{pmatrix}=\lim_{h\to 0}\frac{(3-h)^2+4(3-h)-5}{3-h-3}=\lim_{h\to 0}\frac{9-6h+h^2+12-4h-5}{-h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-10h+16}{-h}=\frac{16}{-0}=-\infty.$$

Sada smo upotrebili smenu $x = 3 - h$, gde je h mala pozitivna veličina koja teži nuli. Na osnovu dobijene granične vrednosti, zaključujemo da kad x teži ka 3 sa leve strane funkcija teži $-\infty$. Dakle prava **$x = 3$ je vertikalna asimptota** funkcije i sa leve i sa desne strane grafika.

Ukoliko važi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ i/ili $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, onda je prava **$y = b$, horizontalna asimptota**.

Granična vrednost racionalne funkcije kad $x\to\infty$, određuje se na sledeći način:

Opšti oblik racionalne funkcije je $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+a_1\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}}+\cdots+a_{n-1}\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^{n-1}}}+a_n\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^n}}\right)}{x^m\left(b_0+b_1\underset{\swarrow 0}{\frac{1}{x}}+\cdots+b_{m-1}\underset{\swarrow 0}{\frac{1}{x^{n-1}}}+b_m\underset{\swarrow 0}{\frac{1}{x^m}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^na_0}{x^mb_0}=\begin{cases}\infty, & n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases}$$

U našem primeru je $n = 2$, $m = 1$, pa je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x-3}=\infty$

Što znači da vertikalna asimptota ne postoji. Vertikalna i kosa asimptota se uzajamno isključuju, ako postoji jedna ne postoji druga. U ovom primeru ne postoji horizontalna asimptota, pa ćemo ispitati da li postoji kosa asimptota.

Opšti obrazac za **kosu asimptotu je $y = ax + b$**, gde je $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, a $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

U našem primeru je $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2+4x-5}{x-3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-3x}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-5}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-5-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x-5}{x-3}=7$$

pa je kosa asimptota $\boldsymbol{y = x + 7}$. Da bi nacrtali kosu asimptotu, dovoljne su nam bilo koje dve njene tačke. $y(0) = 7$, $y(-7) = 0$. Kosa asimptota prolazi kroz tačke $K_1(0, 7)$ i $K_2(-7, 0)$.

5) **Monotonost funkcije i ekstremne vrednosti.**

Da bi odredili ekstremne vrednosti i intervale monotonosti, potrebno je da nađemo prvi izvod funkcije i nule prvog izvoda.

Za nalaženje izvoda racionalne funkcije upotrebićemo formulu za izvod količnika.

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. U našem slučaju je $u=x^2+4x-5$, $v=x-3$, $u'=2x+4$, $v'=1$.

$$y'=\left(\frac{x^2+4x-5}{x-3}\right)'=\frac{(x^2+4x-5)'(x-3)-(x^2+4x-5)(x-3)'}{(x-3)^2}=$$

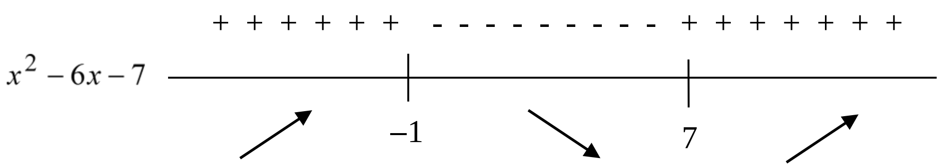
$$\frac{(2x+4)(x-3)-(x^2+4x-5)\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-6x+4x-12-x^2-4x+5}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{6\pm 8}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{14}{2}=7,\ x_2=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow y'=\frac{(x-7)(x+1)}{(x-3)^2}$$

Dakle, nule prvog izvoda su $x_1 = 7$ i $x_2 = -1$. Sada treba odrediti znak prvog izvoda. Kako je u imeniocu funkcije y', izraz $(x - 3)^2$ koji je pozitivan za svaki realan broj (zbog toga što je izraz na kvadrat), znak funkcije y' zavisi samo od znaka kvadratne funkcije u brojiocu

$x^2-6x-7=(x-7)(x+1)$.



$y' > 0$ za $x\in(-\infty, -1)\cup(7, -\infty)$, pa je funkcija monotono rastuća na tim intervalima;

$y' < 0$ za $x\in(-1, 7)$, pa je funkcija monotono opdajuća na tom intervalu. U tački $x = -1$, funkcija menja svoju monotonost, iz monotono rastuće prelazi u monotono opadajuću, pa u toj tački funkcija ima lokalni maksimum. U tački $x = 7$ iz monotono opadajuće, funkcija prelazi u monotono rastuću, pa u toj tački ima lokalni minimum. y koordinatu maksimuma dobijamo kad za vrednost argumenta u funkciji zamenimo $x = -1$.

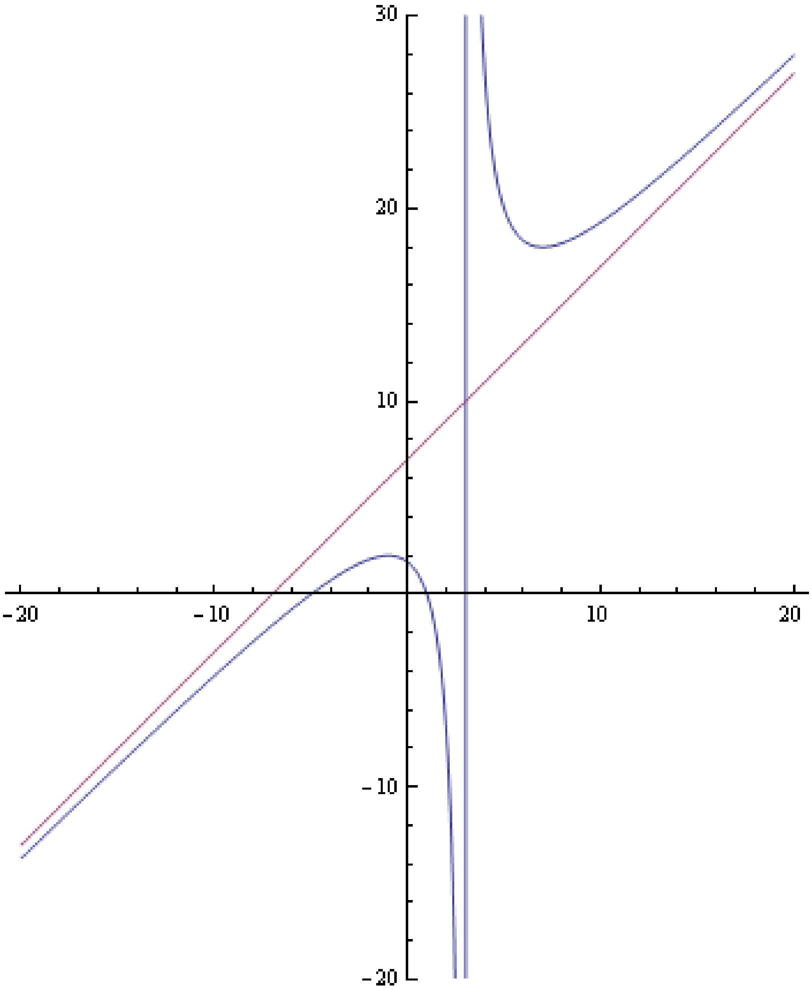
$y_{\max} = y(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 4\cdot(-1) - 5}{-1-3} = \dfrac{-8}{-4} = 2$, $P_{max}(-1, 2)$ - koordinate maksimuma

$y_{\min} = y(7) = \dfrac{7^2 + 4\cdot 7 - 5}{7-3} = \dfrac{72}{4} = 18$, $P_{min}(7, 18)$ – koordinate minimuma

7) konveksnost, konkavnost i prevojne tačke $y'' = \dfrac{32}{(x-3)^3}$; drugi izvod funkcije nema nule, pa funkcija nema prevojne tačke; funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, 3)$, konveksna za $x \in (3, +\infty)$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x-3)^3$	$- - - - - - - - - - - - - - -$	$+ + + + + +$

3



2. $y=\dfrac{x^2+x-2}{(x+3)^2}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$;

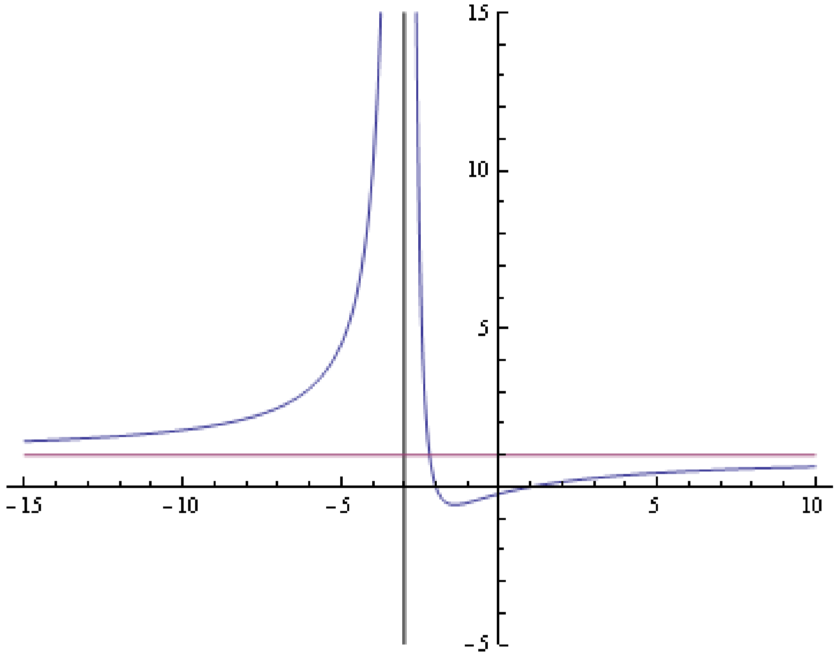
2) nule funkcije $N_1(-2,0)$, $N_2(1,0)$; presek grafika funkcije sa y-osom $M(0,-2/9)$;

3) znak funkcije za $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty),\ y>0$, a za $x\in(-2,1),\ y<0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = -3$; horizomtalna asimptota $y = 1$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y'=\dfrac{5x+7}{(x+3)^3}$; za $x\in(-\infty,-3)\cup(-7/5,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(-3,-7/5)$, funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(-7/5,-9/16)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y''=\dfrac{-2(5x+3)}{(x+3)^4}$, funkcija je konveksna za $x\in(-\infty,-3/5)$, konkavna za $x\in(-3/5,+\infty)$ i ima prevojnu tačku $P(-3/5,-17/8)$.



3. $y = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty,3) \cup (3,+\infty)$;

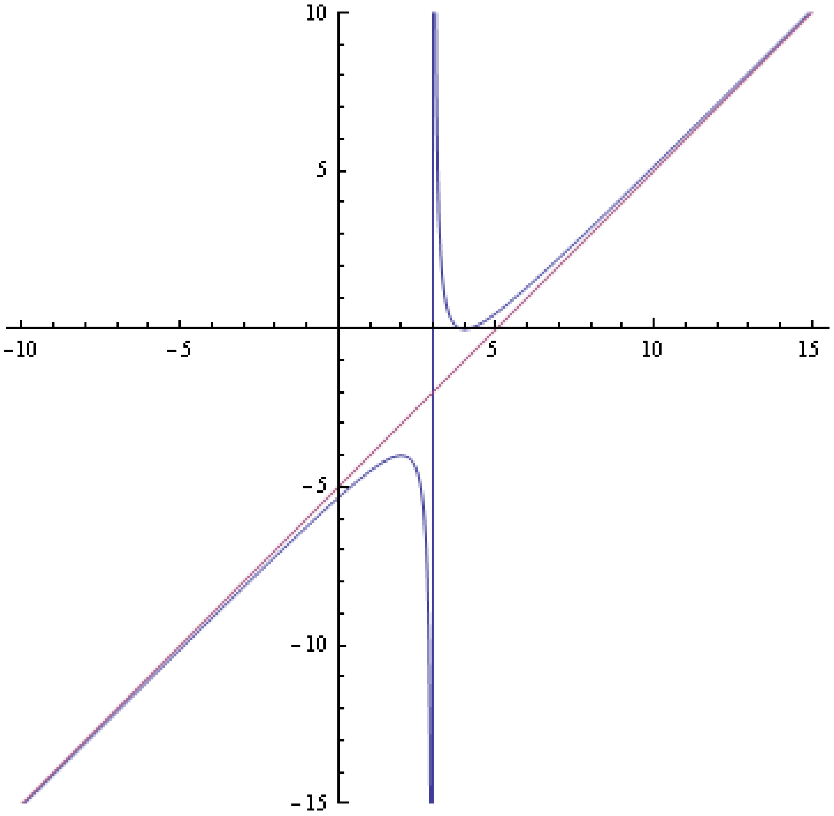
2) nule funkcije N(4,0); presek grafika funkcije sa *y*-osom M(0,–16/3);

3) znak funkcije za $x \in (-\infty,-3)$, $y < 0$, a za $x \in (3,+\infty)$, $y > 0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = 3$; kosa asimptota $y = x - 5$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$; za $x \in (-\infty,2) \cup (4,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x \in (2,4)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(4, 0)$ i maksimum u tački $P_{max}(2, -4)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y'' = \dfrac{2}{(x-3)^3}$, funkcija je konkavna za $x \in (-\infty,3)$, konveksna za $x \in (3,+\infty)$ i nema prevojnu tačku.



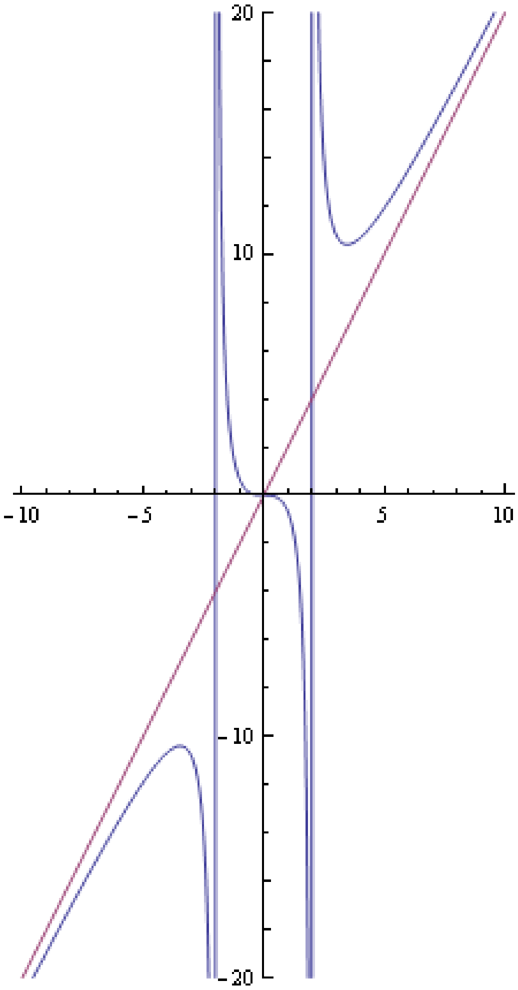
4. $y=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$, **Rešenje**:

1) oblast definisanosti $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$;

$f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2-4}=\dfrac{-2x^3}{x^2-4}=-f(x)$, funkcija je neparna što znači da je grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak;

2) nula funkcije i presek grafika funkcije sa *y*-osom je ista tačka $N(0,0)$;

3) znak funkcije



za $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)\, y>0$, a za $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2), y<0$ 4) asimptote: funkcija ima dve vertikalne asimptote

$x=-2$ i $x=2$ i kosu asimptotu $y=2x$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y'=\dfrac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$; za $x\in(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3},+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}\left(2\sqrt{3},6\sqrt{3}\right)$ i maksimum u tački $P_{\max}(-2\sqrt{3},-6\sqrt{3})$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y''=\dfrac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, funkcija je konkavna za $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$, konveksna za $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ i ima prevojnu tačku $P(0,0)$;

5. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;

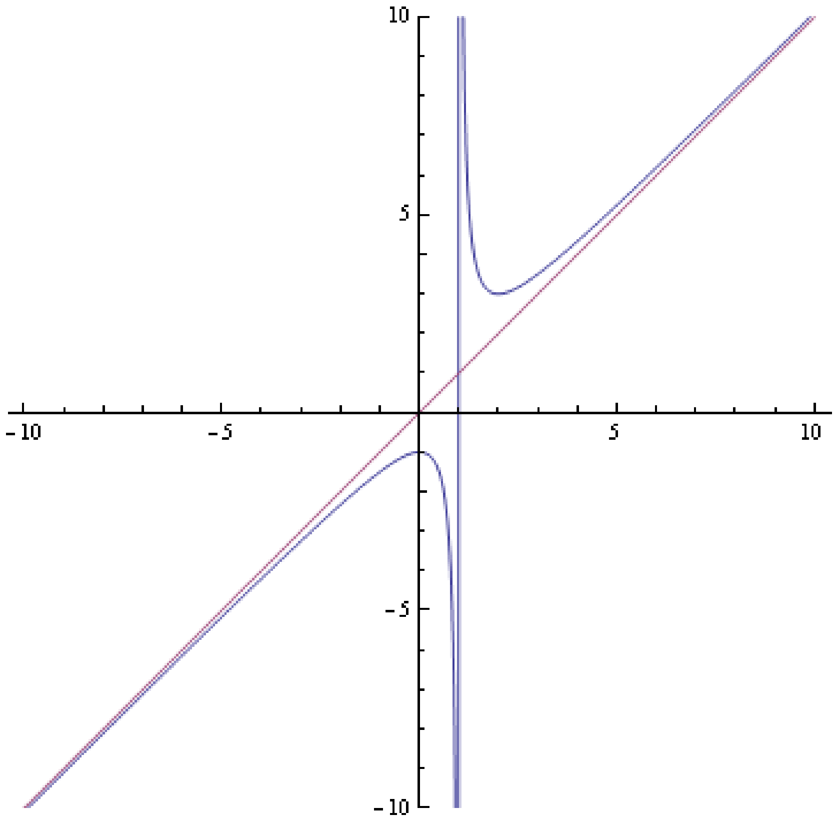
2) kvadratna jednačina x^2-x+1 nema realna rešenja, pa funkcija nema nule; presek grafika funkcije sa y-osom M(0,–1);

3) znak funkcije za $x\in(-\infty,1),\ y<0$, a za $x\in(1,+\infty),\ y>0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = 1$; kosa asimptota $y = x$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; za $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(0,2)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(2, 3)$ i maksimum u tački $P_{max}(0, -1)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}$, funkcija je konkavna za $x\in(-\infty,1)$, konveksna za $x\in(1,+\infty)$ i nema prevojnu tačku.



6. $y=\dfrac{x+3}{x^2+x+3}$, **Rešenje**: 1) kvadratna jednačina $x^2+x+3=0$ nema realna rešenja, pa je oblast definisanosti $(-\infty,+\infty)$;

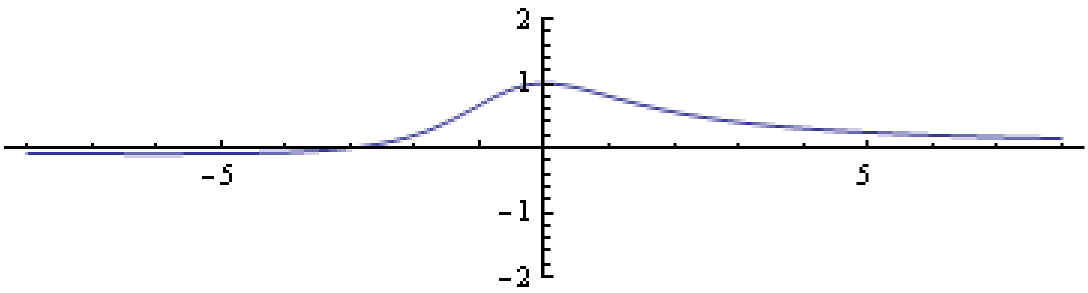
2) nula funkcije $N(3,0)$; presek grafika funkcije sa y-osom M(0,1);

3) znak funkcije za $x\in(-\infty,-3),\ y<0$, a za $x\in(-3,+\infty),\ y>0$;

4) asimptote: funkcija nema vertikalne asimptote jer je definisana na celom skupu realnih brojeva; horizontalna asimptota $y=0$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y'=\dfrac{x(x+6)}{(x^2+x+3)^2}$; za $x\in(-\infty,-6)\cup(0,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(-6,0)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(0,\ 1)$ i maksimum u tački $P_{max}(-6,\ -1/11)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y''=\dfrac{2(x^3+9x^2-9)}{(x^2+x+3)^3}$, teško je izračunati nule drugog izvoda pa samim tim i odrediti njegov znak. grafik može da se nacrta i bez ovih elemenata.



7. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}=\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)(x+2)}$,

Rešenje: 1) oblast definisanosti $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$;

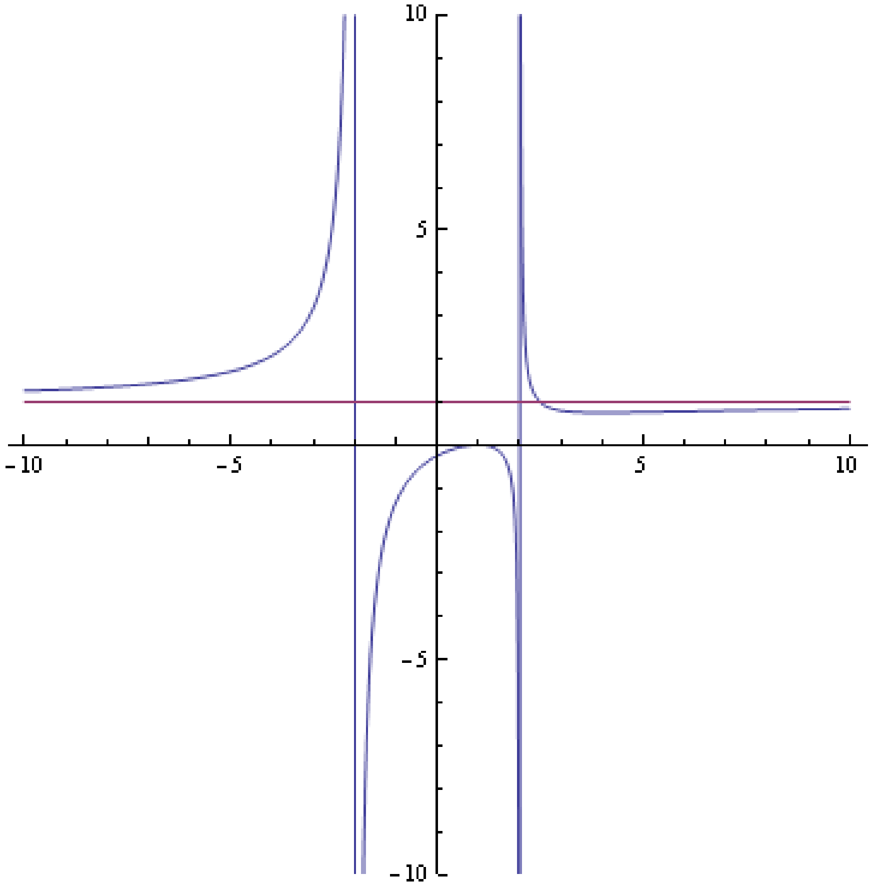
2) nula funkcije $N(1,0)$; presek grafika funkcije sa y-osom M(0,–1/4);

3) znak funkcije za $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $y>0$, a za $x\in(-2,2)$, $y<0$; 4) asimptote: funkcija ima dve vertikalne asimptote $x=-2$ i $x=2$; horizontalna asimptota $y=1$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y'=\dfrac{2x^2-10x+8}{(x^2-4)^2}$; nule prvog izvoda $x=1$ i $x=4$;

za $x\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(1,4)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(4, 3/4)$ i maksimum u tački $P_{max}(1, 0)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y''=\dfrac{-2(2x^3-15x^2+24x-20)}{(x^2-4)^3}$, teško je izračunati nule drugog izvoda pa samim tim i odrediti njegov znak. Grafik može da se nacrta i bez ovih elemenata.



8. $y = \dfrac{(x-1)^2}{-x^2+2x+8}$

Rešenje: 1) oblast definisanosti $(-\infty,-2)\cup(-2,4)\cup(4,+\infty)$;

2) nula funkcije $N(1,0)$; presek grafika funkcije sa y-osom M(0,1/8);

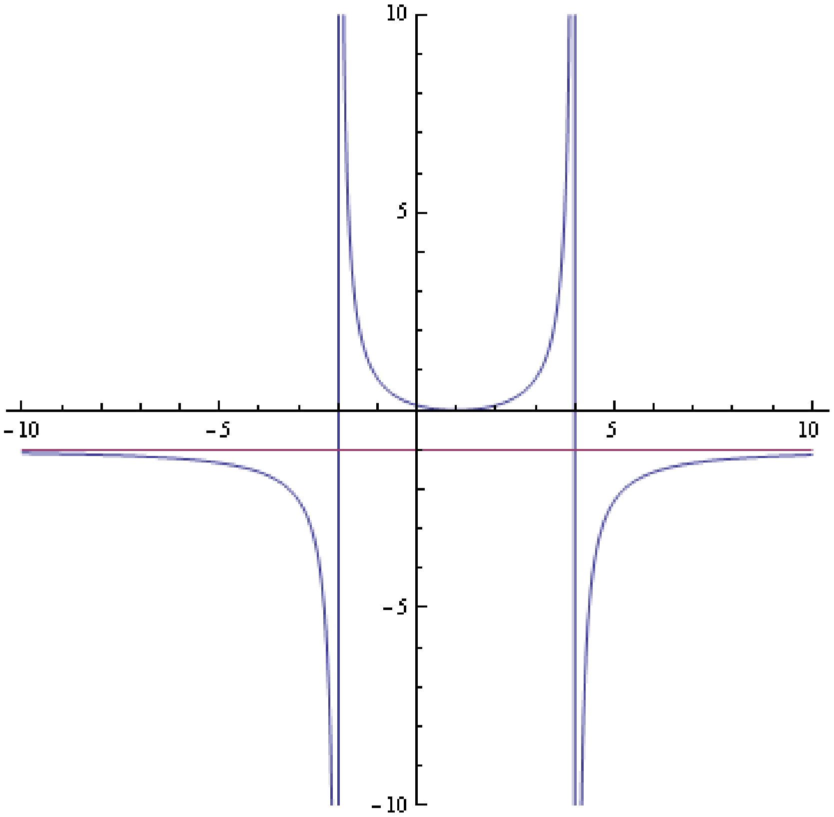
3) znak funkcije za $x \in (-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$, $y<0$, a za $x\in(-2,4)$, $y>0$; 4) asimptote: funkcija ima dve vertikalne asimptote x = -2 i x = 4; horizontalna asimptota y = -1 ;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y' = \dfrac{18(x-1)}{(-x^2+2x+8)^2}$; nula prvog izvoda x = 1;

za $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)$ funkcija je monotono opadajuća, a za $x\in(1,4)\cup(4,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(1,\ 0)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y'' = \dfrac{54(x^2-2x+4)}{(-x^2+2x+8)^3}$, jednačina (x^2-2x+4) nema realna rešanja, pa drugi izvod nema nule. Znak drugog izvoda

za $x\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$, $y''<0$, funkcija je konkavna, a za $x\in(-2,4)$, $y''>0$, funkcija je konveksna



9. $y=\dfrac{5+4x-x^2}{x+3}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$;

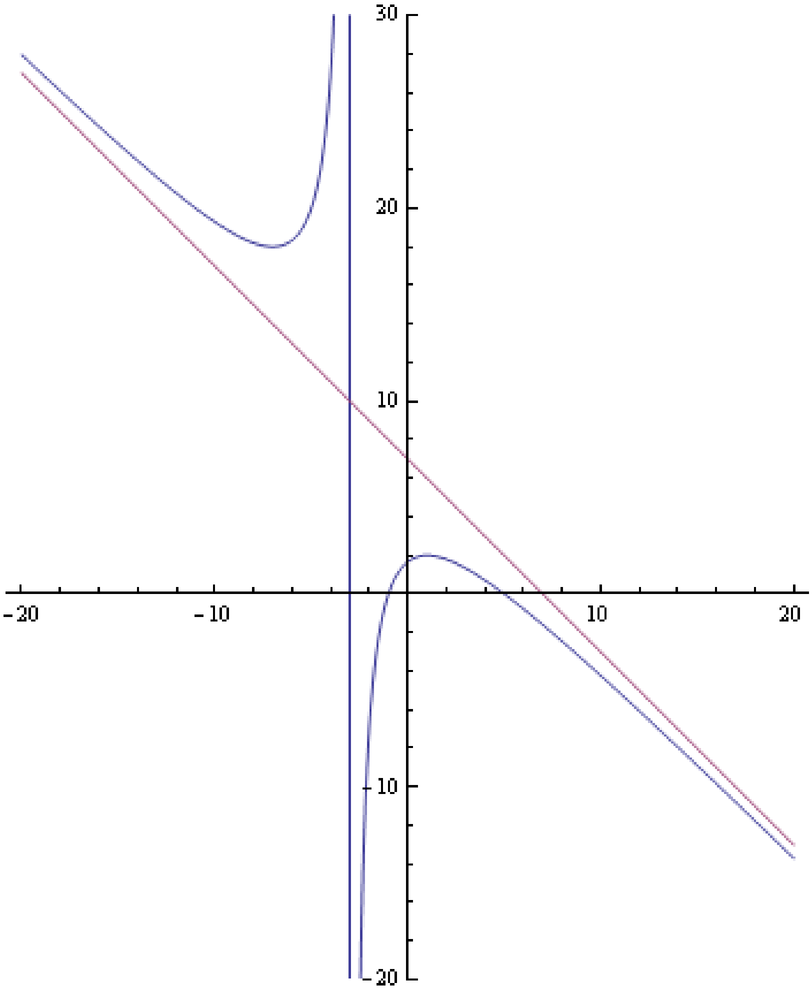
2) nule funkcije $N_1(-1,0)$, $N_2(5,0)$; presek grafika funkcije sa y-osom M(0, 5/3);

3) znak funkcije za $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,5)$, $y>0$, a za $x\in(-3,-1)\cup(5,+\infty)$, $y<0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = -3$; kosa asimptota $y = -x + 7$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y'=\dfrac{-x^2-6x+7}{(x+3)^2}$; za $x\in(-\infty,-7)\cup(1,+\infty)$ funkcija je monotono opadajuća, a za $x\in(-7,-3)\cup(-3,1)$ funkcija je monotono rastuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(-7, 18)$ i maksimum u tački $P_{max}(1, 2)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y''=\dfrac{-32}{(x+3)^3}$, funkcija je konveksna za $x\in(-\infty,-3)$, konkavna za $x\in(-3,+\infty)$ i nema prevojne tačke.



10. $y=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-x-6}$,

Rešenje: 1) oblast definisanosti $(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$;

2) nula funkcije $N(2,0)$; presek grafika funkcije sa y-osom M(0,-2/3);

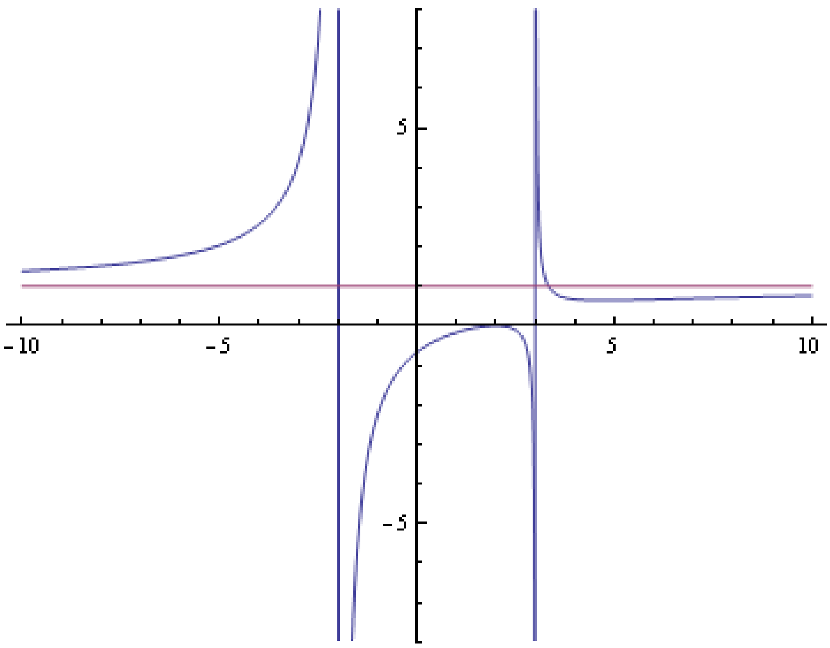
3) znak funkcije za $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$, $y>0$, a za $x\in(-2,3)$, $y<0$;

4) asimptote: funkcija ima dve vertikalne asimptote x = -2 i x = 3; horizontalna asimptota y = 1 ;

5) monotonost i ekstremne vrednosti: $y'=\dfrac{3x^2-20x+22}{(x^2-x-6)^2}=\dfrac{(x-2)(3x-14)}{(x^2-x-6)^2}$; nule prvog izvoda

x = 2 i x = 14/3; za $x\in(-\infty,2)\cup(14/3,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(2,14/3)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački P_{min}(14/3, 16/25) i maksimum u tački P_{max}(2, 0);

6) konveksnost i prevojne tačke: $y''=\dfrac{-2(3x^3-30x^2+84x-88)}{(x^2-x+6)^3}$, teško je izračunati nule drugog izvoda pa samim tim i odrediti njegov znak. Grafik može da se nacrta i bez ovih elemenata.



11. $y=\dfrac{x^2+6x-7}{x-2}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$;

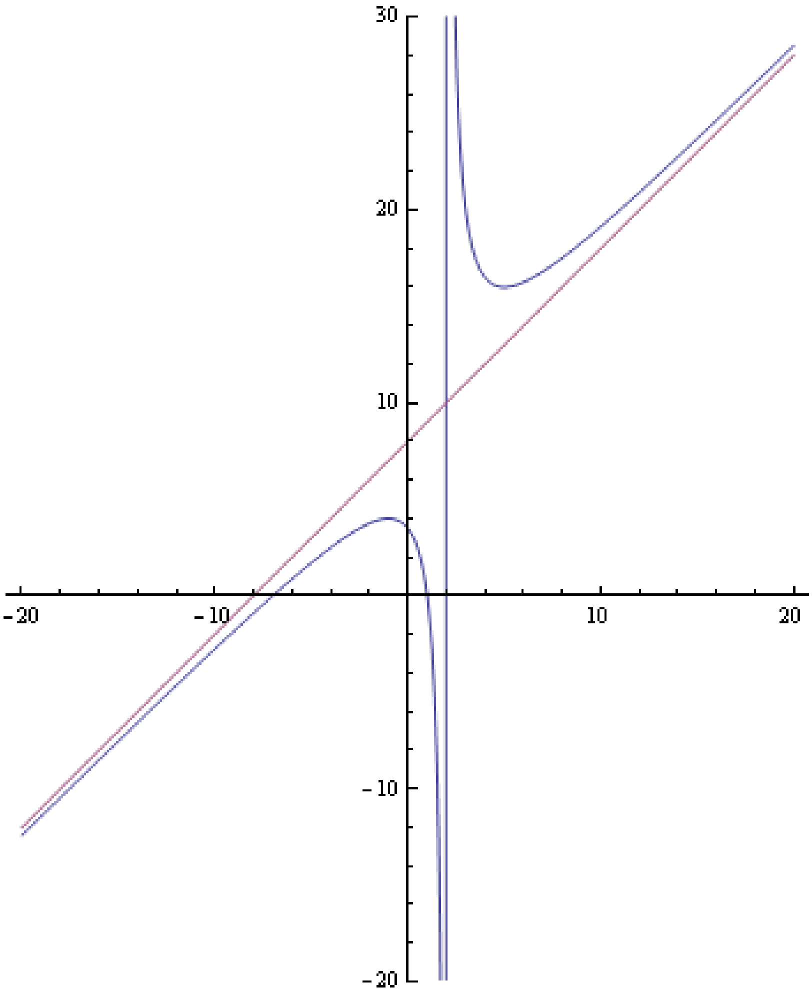
2) nule funkcije $N_1(1, 0)$, $N_2(-7, 0)$; presek grafika funkcije sa y-osom M(0; 3,5);

3) znak funkcije za $x\in(-\infty-7)\cup(1,2)$, $y<0$, a za $x\in(-7,1)\cup(2,+\infty)$, $y>0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = 2$; kosa asimptota $y = x + 8$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti: $y'=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$; za $x\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(-1,5)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(5, 16)$ i maksimum u tački $P_{max}(-1, 4)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y''=\dfrac{18}{(x-2)^3}$, funkcija je konkavna za $x\in(-\infty,2)$, konveksna za $x\in(2,+\infty)$ i nema prevojnu tačku.



12. $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x-5}$,

Rešenje: 1) oblast definisanosti $(-\infty,-5)\cup(-5,1)\cup(1,+\infty)$;

2) nula funkcije $N(-2, 0)$; presek grafika funkcije sa y-osom $M(0,-4/5)$;

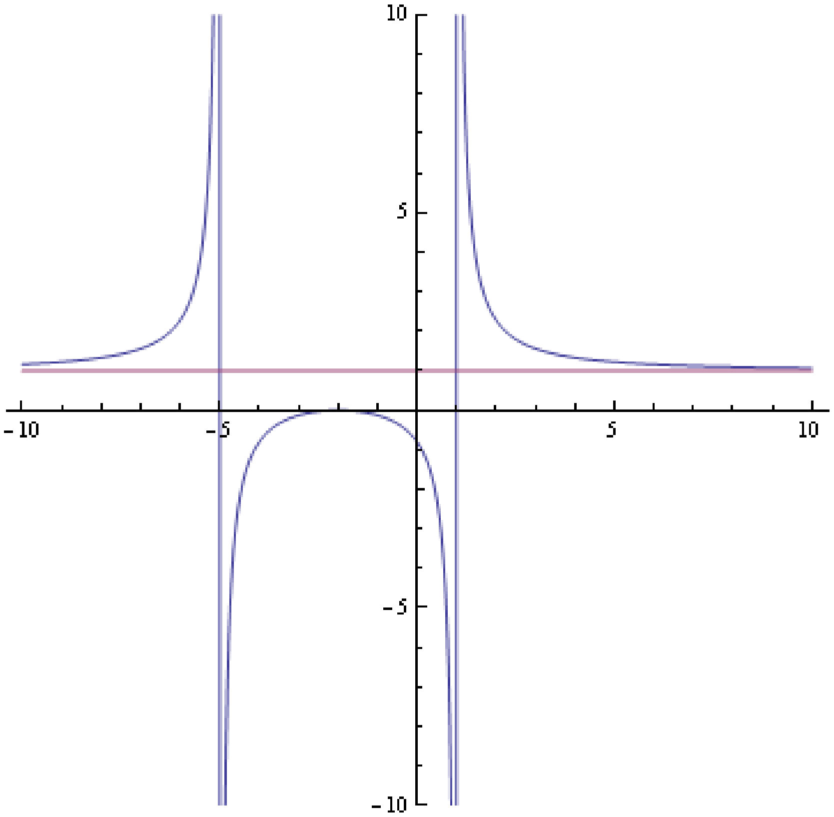
3) znak funkcije za $x\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$, $y>0$, a za $x\in(-5,1)$, $y<0$;

4) asimptote: funkcija ima dve vertikalne asimptote $x=-5$ i $x=1$; horizontalna asimptota $y=1$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti: $y'=\dfrac{-18(x+2)}{\left(x^2+4x-5\right)^2}$; nula prvog izvoda $x = 2$;

za $x\in(-\infty,-5)\cup(-5,-2)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x\in(-2,1)\cup(1,+\infty)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima maksimum u tački $P_{max}(-2, 0)$;

6) konveksnost i prevojne tačke: $y''=\dfrac{54\left(x^2+4x+7\right)}{\left(x^2+4x-5\right)^3}$, jednačina $x^2+4x+7=0$ nema realna rešenja, pa funkcija nema prevojne tačke; funkcija je konveksna za $x\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$ a za $x\in(-5,1)$ funkcija je konkavna.



13. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{(x-1)^2}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty,1))\cup(1,+\infty)$;

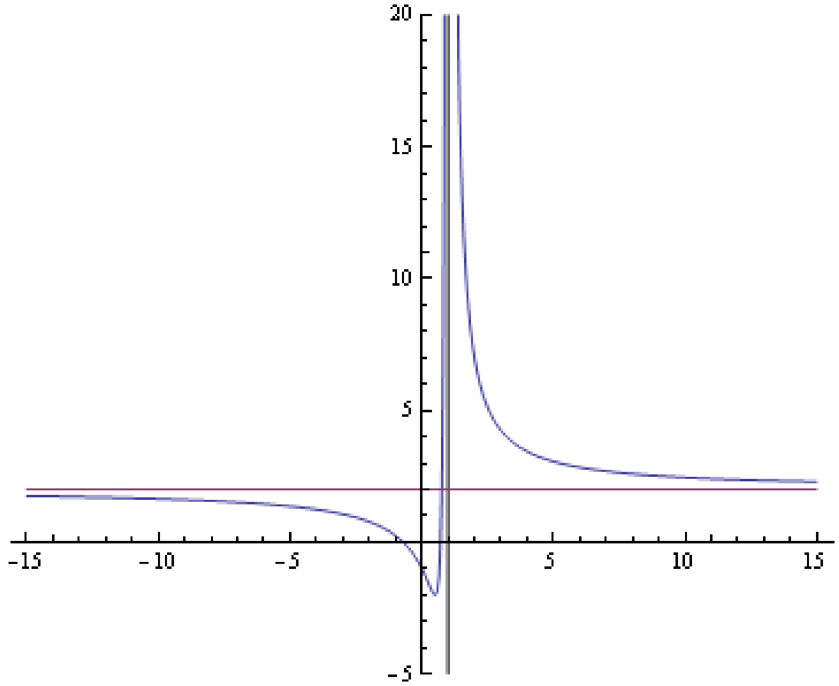
2) nule funkcije $N_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right), N_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, presek grafika funkcije sa y-osom M(0,–1);

3) znak funkcije za $x \in \left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$, $y > 0$, a za $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y < 0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = 1$; horizomtalna asimptota $y = 2$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y' = \dfrac{-2(2x-1)}{(x-1)^3}$; za $x \in (-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty)$ funkcija je monotono opadajuća, a za $x \in (1/2,1)$, funkcija je monotono rastuća; funkcija ima minimum u tački P_{min}(1/2,–2);

6) konveksnost i prevojne tačke $y'' = \dfrac{2(4x-1)}{(x-1)^4}$, funkcija je konkavna za $x \in (-\infty,1/4)$, konveksna za $x \in (1/4,+\infty)$ i ima prevojnu tačku P(1/4,-14/9).



14. $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$;

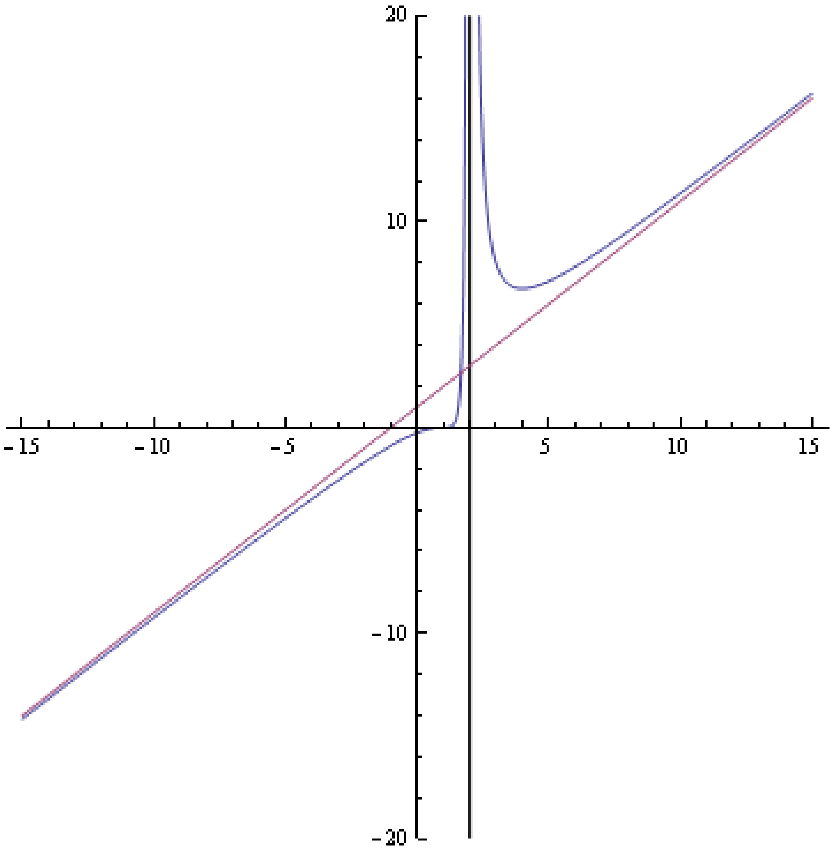
2) nule funkcije N(1, 0); presek grafika funkcije sa *y*-osom M(-1/2, 0);

3) znak funkcije za $x \in (-\infty, 1), y < 0$, a za $x \in (1, +\infty), y > 0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = 2$; kosa asimptota $y = x + 1$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}$; za $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x \in (2, 4)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(6, 27/4)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y'' = \frac{6(x-1)}{(x-2)^4}$, funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, 1)$, konveksna za $x \in (1, +\infty)$ i ima prevojnu tačku $P(1, 0)$.



15. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, **Rešenje**: 1) oblast definisanosti $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;

2) nula funkcije i presek grafika funkcije sa *y*-osom je ista tačka N(0, 0);

3) znak funkcije za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, a za $x \in (0, +\infty)$, $y > 0$;

4) asimptote: vertikalna asimptota $x = -1$; kosa asimptota $y = x/2 - 1$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti: $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(1+x)^3}$; za $x \in (-\infty, -3)\cup(-1, +\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x \in (-3, -1)$ funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima maksimum u tački $P_{max}(-3, -27/8)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y'' = \dfrac{3x}{(1+x)^4}$, funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, 0)$, konveksna za $x \in (0, +\infty)$ i ima prevojnu tačku $P(0, 0)$.