OPERACIONA ISTRAŽIVANJA

Značajne osobine razvoja moderne nauke je činjenica da se u neegzaktnim naukama sve više i uspešnije koriste kvantitativne metode istraživanja, odnosno da se te nauke sve više matematiziraju. Primena matematičkih metoda u prirodnim naukama izazvala je interes za njihovu primenu i u društvenim naukama. Međutim, primenu matematičkih metoda u društvenim naukama sprečavale su brojne okolnosti:

- još je sporno da li je u društvenim naukama moguć takav stupanj primene matematike kao u prirodnim naukama
- pojave i odnosi u privredi su kompleksni i isprepletani te sigurno ne mogu biti opisani jednostavnim matematičkim formulama
- sa druge strane, ni sama matematika nije dovoljno u tom smislu razvijena da bi dovoljno tačno proučavala kompleksnije privredne pojave; teorijska matematika je razvila odlične metode za proučavanje prirodnih pojava, ali te metode nisu dovoljne za proučavanje društvenih pojava.

Prvi pokušaji uvođenja matematike u društvene nauke potiču sredinom XIX veka. *Walras, Jevons, Pareto* i drugi pokušali su da matematiziraju teorijsku ekonomiju po uzoru na pokušaj u nebeskoj mehanici. U matematičkoj formulaciji društvenih nauka i odnosa postignuti su znatni formalni uspesi, ali su njihove matematičke formulacije ostale nekvantificirane. Zbog nemogućnosti kvantificiranja matematički formulisanih društvenih odnosa na tadašnjem stepenu razvoja matematike, upotreba matematičkih metoda nije imala rezultata. Međutim, i pored početnih neuspeha nije nestalo želje za matematiziranjem društvenih nauka. Stvaranjem povoljnijih uslova i u matematici i u društvenim naukama, rad je uspešno nastavljen. Matematika je razvila nove grane, kao: račun verovatnoće kao osnova za statistiku, teorija igara koja pokušava rešavanje konfliktnih situacija, kibernetika...Neke modernije grane matematike razvijaju se u sasvim novom smeru, zanemarujući brojeve i baveći se nekvantitativnim kategorijama, kao: matematička logika, teorija skupova, topologija...

Na drugoj strani, razvile su se neke nove grane društvenih nauka, kao: psihologija rada, teorija organizacije, operaciona istraživanja...

Velika prepreka uspešnom prodoru matematičkih metoda u društvenim naukama je kompleksnost tih nauka. Pojave koje pročavaju društvene nauke su mnogo kompleksnije od prirodnih pojava. U njima se pored kvantitativnih javljaju i brojne nekvantitativne kategorije, koje je matematičkim metodama teško obuhvatiti.. Takva priroda društvenih nauka postavlja određene granice primeni matematičkih metoda

Iz želje da se donošenje odluka temelji na naučnim osnovama, nikla je nova grana primenjene matematike - operaciona istraživanja. Kao naučna metoda, operaciona istraživanja su se pod tim nazivom javila za vreme II svetskog rata na problemima vojne prirode u Velikoj Britaniji, kada su vojni rukovodioci pozvali naučnike da pomognu u rešavanju strateških i taktičkih problema. Zbog svoje praktične primene, ona su se brzo proširila i na druga područja.

Operaciona istraživanja su posebna metodološka i normativna delatnost, u kojoj se intenzivno i sistematski upotrebljavaju kvantitativne matematičke i statističke metode. U prve pokušaje upotrebe operacionih istraživanja možemo ubrojiti istraživanje *F.W.Taylora*, koji je 1895. godine proučavao koliko bi velikom lopatom trebalo da radi radnik da bi njegov učinak u propisanom vremenu bio najveći.

Naročito povoljno razdoblje za razvoj operacionih istraživanja počeo je posle II svetskog rata, posebno u privredno razvijenijim zemljama. Toj su atmosferi doprineli brzi tehnološki napredak, moderna organizacija rada itd. što se opet pripisuje revolucionarnom razvoju teorije organizacije, elektronike, automatizacije i računarske tehnologije. Računarska tehnologija je prvi uslov za razvoj i uspešnu primenu operacionih istraživanja.

Za kvantitativno istraživanje nekog problema potrebni su početni podaci, različiti pokazatelji i parametri. To su različiti empirijski ili statistički podaci koji su dati ili su rezultat posrednih merenja i izračunavanja. Istraživački rad pomoću metoda operacionih istraživanja je specifičan način rada koji zahteva saradnju matematičara, statističara i stručnjaka iz oblasti koja se istražuje.

Kriterijumi za klasifikaciju problema operacionih istraživanja-

- **prema upotrebljenim metodama** razlikujemo sledeće tipove problema:

- probleme linearnog programiranja, probleme nelinearnog programiranja, probleme mrežnog programiranja, probleme koji se određuju metodom Monte Carlo...

- **prema sadržaju problema** razlikujeme sledeće tipove problema:

- proizvodne probleme, transportne probleme, probleme zaliha, probleme redova čekanja...

Potrebni uslovi za primenu metoda operacionih istraživanja:

- da se problem koji se rešava može predstaviti pogodnim matematičkim modelom (skupom matematičkih funkcija kojima se opisuju karakteristike problema – funkcija cilja i sistem ograničenja)
- timski rad na rešavanju problema
- brojni i pouzdani polazni podaci
- korišćenje informacionih tehnologija

Operaciona istraživanja imaju sledeće **faze** rada:

- formulisanje problema - ova faza podrazumeva tačno formulisanje problema i jasno postavljanje cilja koji se želi postići, kao i sagledavanje uslova pod kojima će se cilj ostvariti.
- istraživanje svih činjenica i podataka - u ovoj fazi se sagledavaju svi faktori koji utiču na dati problem, kako bi se neki od njih mogli zanemariti pri postavljanju modela. Pri tome se javljaju brojne teškoće. Od svih, najvažnija je ta što nismo u stanju da uzmemo u obzir sve momente ispitivane pojave. Sa jedne strane zato što bismo morali da operišemo sa tako velikim brojem promenljivih da bi rešavanje i na računaru postalo nemoguće, a sa druge zato što bi se pri ispitivanju javio veliki broj momenata zavisnih samo od slučaja, što bi opet prikrilo suštinu problema. Ovim se objašnjava činjenica da smo u stvarnosti prisiljeni da pribegavamo izvesnim ograničavajućim pretpostavkama. Suština je da iz niza podataka odaberemo bitna, ona koja ispitivanu pojavu karakterišu, a ostala u interesu omogućavanja analize, zanemarimo. Radi se o

pretpostavkama koje samo uprošćuju problem, ali u odnosu na suštinu problema ne prouzrokuju znatna odstupanja od stvarnosti.

- postavljanje matematičkog modela- ova faza podrazumeva prevođenje problema na jezik matematike. U odnosu na matematičke modele, postavljaju se dva zahteva:

    + da sa gledišta cilja razmatranja što vernije odražavaju stvarnost
    + da i računsko-tehnički budu pogodni za obradu

Gotov model je, po pravilu, rezultat zajedničkog rada većeg broja stručnjaka iz raznih oblasti: ekonomisti, matematičari, inženjeri i stručnjaci koji dobro poznaju praktičnu stranu problema. To su obično operaciono-istraživačke grupe,koje su, ako su pravilno organizovane, garancija uspešne konstrukcije modela. Puna pažnja se posvećuje postavljanju modela, jer se može desiti da je model ispravno postavljen sa matematičkog gledišta, ali je njegovo rešenje neupotrebljivo na stvarni problem, jer model ne prikazuje dovoljno dobro sam problem. Znači, model mora biti tako formulisan da zadržava osnovna, bitna svojstva problema i da se matematičkim metodama može rešiti.

- rešavanje modela- odgovarajućim matematičkim metodama
- provera modela i rešenja - ova faza podrazumeva još jednom proveru modela i njegovog rešenja u smislu verodostojnosti sa realnim problemom
- donošenje odluke - što znači da se donošenje odluke zasniva na naučnim metodama

Osobine operacionih istraživanja:

- sistemski pristup
- kontinualno istraživanje
- optimizacija rešenja
- kompleksno istraživanje

Tipične grupe problema za rešavanje:

- upravljanje zalihama
- raspoređivanje resursa
- remonti i zamene mašina
- masovno opsluživanje
- planiranje i upravljanje
- izbor maršrute

Tipične grupe problema s obzirom na matematički aparat i njegovu primenu:

- linearno programiranje
- teorija igara
- dinamičko programiranje
- teorija redova čekanja
- Markovljevi lanci i procesi
- metode simulacije
- metode matematičkog prognoziranja

LINERANO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje je posebna matematička metoda koja se koristi u operacionim istraživanjima. Linearno programiranje je relativno mlada grana primenjene matematike. Njeni počeci datiraju neposredno pred II svetski rat.

Prvi rad koji se bavi formulacijom i rešavanjem problema lineranog programiranja je studija ruskog matematičara *L.V.Kantoroviča* o organizaciji i planiranju proizvodnje, pod nazivom ″Matematičeskie metodi organizaciii planirovanija proizvodstva″, Leningrad, 1939. Prikazani postupak koji se može primeniti na rešavanje brojnih problema, autor je nazvao metodom ″rešavajućih koeficijenata″.Međutim, ovaj pionirski rad nije dugo imao nastavka. Tek je za vreme II svetskog rata, ratna privreda u Zapadnim zemljama istakla nužnost većeg mešanja u privredni život, čime je započeo rad u tom pravcu, što posebno važi za američke naučnike.Kao prvi među njima *F.L.Hitchcock* je 1941.godine objavio studiju o nekom transportnom problemu linearnog programiranja. Nezavisno od njega *Koopmans* 1945. godine dali rešenje za tzv. transportni problem. *G.B.Dantziga* je 1947. otkrio opštu algebarsku metodu nazvanu - *Simplex metoda* koja služi za rešavanje svih problema linearnog programiranja. Od tada se primena lineranog programiranja širi veoma brzo. Danas je već jedan od najefikasnijih matematičkih instrumenata za rešavanje privrednih problema. U međuvremenu su razvijeni još mnogi metodi, ali po značaju ni jedan se ne može meriti sa simpleks metodom.

Linearno programiranje se razvijalo uporedo sa dve naučne grane - međusektorskom analizom i teorijom igara. Po sadržaju se ove tri grane bitno razlikuju, ali sa stanovišta upotrebljenih matematičkih sredstava su veoma slične, pa se i metodološki međusobno prepliću. Matematičku osnovu sve tri grane čini linearna algebra.

Za praksu značajni problemi linearnog programiranja moraju uzeti u obzir brojne okolnosti i zato pri numeričkom rešavanju traže toliko računanja da se mogu rešiti samo računarom. Zato nije ni čudo da se linearno programiranje u praksi uvelo tek onda kada su se za numerička računanja mogli koristiti računari, pa se u razvoju lineranog programiranja godina 1952. smatra važnom prekretnicom, jer je tada prvi put bio napravljen program za rešavanje problema linearnog programiranja po simpleks metodi na računaru.

Problemi na koje se linearno programiranje primenjuje su brojni. Autori su matematičari, ekonomisti, inženjeri i razni drugi stručnjaci. Posebne studije o ekonomskim, poljoprivrednim, industrijskim, saobraćajnim, vojnim i drugim oblastima (videti V.Riley and S.Gass, Linear Programming and Associated Techniques, A Comprehensive Bibliography of Linear, Nonlinear, and Dynamic Programming, Baltimore, 1958.).

Sa matematičkog stanovišta, problemi linearnog programiranja ne zadaju više nikakvih problema. Matematičku osnovu linearnog programiranja čine teorija linearnih nejednačina i jednačina i teorija konveksnih poliedara, dakle dve grane teorijske matematike koje su za potrebe linearnog programiranja dovoljno razvijene. Problemi linearnog programiranja se rešavaju algebarskim metodama. Matematička sredstva koja se pri tome koriste zavise od toga koliko se varijabli pojavljuje i od broja uslovnih jednačina ili nejednačina. Po obimu skromne linearne probleme je lako rešiti grafičkim ili nekim elementarnim aritmetičkim metodama.

Za linearno programiranje je bitno da je funkcija cilja linearna i da su sve uslovne nejednačine ili jednačine linearne. Sa matematičkog stanovišta, takva jednostavnost problema linearnog programiranja doprinela je da se za relativno kratko vreme formira odgovarajuća teorija. Sa ekonomskog i sadržajnog stanovišta, baš su u linearnosti skrivene mnoge opasnosti. Zato kada se stvara odgovarajući model linearnog programiranja za ma koji privredni problem, treba dobro razmisliti da li su opravdane teze o linearnosti.

Uslovi potrebni da se linearno programiranje može primeni u rešavanju konkretnih zadataka:

1. Potrebna je jasna formulacija cilja koji se u datim uslovima može realno zahtevati, mada u praksi nije uvek lako naći jedinstveni kriterijum koji dozvoljava da se bezuslovno odbaci jedan, a usvoji drugi program. Međutim, taj jedinstveni kriterijum se mora naći.
2. Specifični uslovi - ograničenja su zasnovana na postojećim izvorima, planskim proporcijama i drugim faktorima koji određuju dozvoljena rešenja. Pošto je u praksi teško uzeti u obzir sve postojeće faktore, potrebno je, kao i pri izboru kriterijuma optimalnosti, eksperimentisanje i iskustvo da tako postavljeni model, u poređenju sa stvarnošću, ne izgubi realni karakter i praktičnu vrednost.
3. Zadatak treba da dozvoli dobijanje niza rešenja koja daju različite programe, da bi se izabrao onaj koji je optimalan za date uslove.
4. Model zadatka linearnog programiranja treba da sadrži linearne jednačine, tj. da realne zavisnosti ne protivureče ovom zahtevu.

OPŠTI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

David Gale, profesor matematike na Brown University u Providence, glavnom gradu najmanje američke države Rhode Island, razlikuje tri problema linearnog programiranja: standardni, kanonski i opšti. Opšti problem linearnog programiranja se u matematičkom obliku može izraziti na sledeći način:

treba odrediti vrednosti promenljivih $x_1, \dots x_n$ koje odgovaraju uslovima nenegativnosti:

$$x_1 \geq 0, \dots x_n \geq 0$$

i linearnim jednačinama ili nejednačinama kao ograničavajućim uslovima:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \overset{>}{\underset{<}{=}} b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \overset{>}{\underset{<}{=}} b_2$$

....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \overset{>}{\underset{<}{=}} b_m$$

tako da funkcija cilja (f-ja kriterijuma):

$$f(x_1, \dots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ima ekstremnu vrednost, maksimum ili minimum

Pri tome su m i n proizvoljni prirodni brojevi; koeficijenti a_{ij} i c_j su proizvoljni realni brojevi; brojevi b_i su proizvoljni nenegativni brojevi. Isto tako, pri tome su c_j (j=1,2...n) koeficijenti funkcije cilja ili funkcije kriterijuma; a_{ij} (i=1,2...m; j=1,2...n) koeficijenti sistema ograničenja; b_i (i=1,2...m) nezavisni članovi sistema ograničavajućih uslova. Znači, i- označava vrste, a j- kolone.

Kod lineranog programiranja računamo ekstremne vrednosti funkcije cilja, nekada mimimum, a nekada maksimum. Bitnih razlika nema, jer problem za maksimum možemo uvek pretvoriti u odgovarajući problem za minimum funkcije cilja i obratno. To je tzv. **osobina dualnosti.** Znači, bitna osobina linearnog programiranja je da svakom problemu maksimuma odgovara određeni problem minimuma, nazvan dual originalnog problema. Očigledna je simetrija ovog dualiteta. Osim toga, dual od dualnog problema je originalni problem. Sasvim je proizvoljno koji ćemo od ova dva problema zvati dualnim, a koji primarnim.

Za slučaj kada se traži maksimalna vrednost funkcije cilja, problem lineranog programiranja se postavlja na sledeći način- tzv. **standardni oblik linearnog programiranja**:

treba odrediti vrednosti promenljivih $x_1, \dots x_n$ koje odgovaraju uslovima nenegativnosti:

$$x_1 \geq 0, \dots x_n \geq 0$$

i linearnim jednačinama ili nejednačinama kao ograničavajućim uslovima:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots x_n)=c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ima maksimum.

Ili u sažetom obliku:

maksimizirati linearnu f-ju $\max(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

uz uslove

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1,2 \dots m \qquad j = 1,2 \dots n$$

i opšte ograničenje o nenegativnosti promenljivih

$$x_j \geq 0$$

Za slučaj kada se traži minimalna vrednost funkcija cilja, problem lineranog programiranja se postavlja na sledeći način u sažetom obliku:

minimizirati linearnu f-ju $\min(f) = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$

uz uslove

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j = 1,2...n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1,2...m$$

Pri tome su c_j (j=1,2...n) koeficijenti funkcije cilja ili funkcije kriterijuma; a_{ij} (i=1,2...m; j=1,2...n) koeficijenti sistema ograničenja; b_i (i=1,2...m) nezavisni članovi sistema ograničavajućih uslova.

Ma koji problem linearnog programiranja se može napisati u odgovarajućoj formi jednog od ova dva osnovna tipa.

Prvi korak u rešavanju problema linearnog programiranja:

Ako su ograničavajući uslovi dati tako da ih treba izraziti u obliku sistema nejednačina, onda taj sistem nejednačina transformišemo u sistem jednačina na taj način što se uvode tzv. **dopunske promenljive**. Uvođenje dopunskih promenljivih ima pre svega algebarski smisao, koji se sastoji u tome da se sistem nejednačina prevede u sistem jednačina i time postupak uprosti.

Znači, prvoj nejednačini se dodaje promenljiva x_{n+1}, drugoj x_{n+2}..., m-toj nejednačini x_{n+m}, tako da sistem nejednačina koje čine pojedinačna ograničenja postaje:

$$\mathbf{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1}$$
$$\mathbf{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2}$$
....
$$\mathbf{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n + ... x_{n+m} = b_m}$$

Koeficijenti u f-ji kriterijuma uz dopunske promenljive su c_{n+1}, c_{n+2},...,c_{n+m} jednaki nuli.

Primeri za postavljanje matematičkog modela

1. Primer

U nekom preduzeću se proizvode dva proizvoda A i B. Njihova izrada se obavlja na tri grupe različitih mašina M_1, M_2, M_3. Raspoloživi kapaciteti mašina kao i vremena izrade za svaki proizvod dati su u tabeli 1.

Tabela 1. Raspoloživi kapaciteti

proizvod	mašine			ukupno
	M_1	M_2	M_3	
A	10	5	9	24
B	9	12	14	35
kapacitet	9900	7200	9600	26700

Problem se sastoji u sledećem – treba odrediti količine proizvoda A i B koje treba proizvoditi pri maksimalnom iskorišćenju kapaciteta mašina. Matematički model se formira na sledeći način:

Označimo sa x_1 količinu proizvoda A koju treba proizvoditi i x_2 količinu proizvoda B koju takođe treba proizvoditi. Vidi se da za proizvodnju proizvoda A treba $24x_1$, a za B $35x_2$. Kako je cilj maksimalno iskorišćenje kapaciteta, to će f-ja kriterijuma biti oblika: $maf(f)=24x_1+35x_2$

Sa druge strane, proizvodnja ne može biti negativna. Znači, može se ili proizvoditi ili ne proizvoditi, pa odatle proizilazi i tzv. opšti uslov ograničenja, tj. da su promenljive nenegativne:

$x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$

Svaka mašina ima svoj kapacitet i ti kapaciteti predstavljaju ograničenja, jer proizvodnja ne može da bude beskonačna. Iz tabele vidimo da proizvodnja proizvoda A i B zahteva sledeće vreme izrade na pojedinim mašinama:

$10x_1 + 9x_2$ na mašini M_1

$5x_1 + 12x_2$ na mašini M_2

$9x_1 + 14x_2$ na mašini M_3

Ograničenja su data kapacitetom tih mašina:

$$10x_1 + 9x_2 \leq 9900$$
$$5x_1 + 12x_2 \leq 7200$$
$$9x_1 + 14x_2 \leq 9600$$

Ove nejednačine su ti ograničavajući uslovi.

Znači, matematički model za postavljeni problem bi bio:

odrediti maksimalnu vrednost f-je kriterijuma:

$$\max(f) = 24x_1 + 35x_2$$

uz pojedinačna ograničenja:

$$10x_1 + 9x_2 \leq 9900$$
$$5x_1 + 12x_2 \leq 7200$$
$$9x_1 + 14x_2 \leq 9600$$

i opšte ograničenje o nenegativnosti promenljivih:

$x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$

2. Primer

U jednom pogonu nekog preduzeća proizvode se tri proizvoda P_1, P_2, P_3 na grupama mašina M_1, M_2, M_3 i M_4. Potreban broj časova rada na svakoj grupi mašina za svaki proizvod po jedinici proizvoda, raspoloživi kapaciteti i dohodak po jedinici proizvoda dat je u tabeli 2.

Tabela 2. Potrebni podaci

mašine	proizvodi			kapaciteti mašina
	P_1	P_2	P_3	
M_1	5	1	2	2400
M_2	4.5	3	2.2	3000
M_3	1.5	4	3.	2700
M_4	3	2.5	5	3600
dobit po kom.	14	7	10	

Traži se optimalni plan proizvodnje, pod uslovom da se postigne maksimalna dobit. Znači, cilj je max dobit, a ograničenja su raspoloživi kapaciteti.

Znači, matematički model za postavljeni problem bi bio:

odrediti maksimalnu vrednost f-je kriterijuma:

$$\max(f)=14x_1+7x_2+10x_3$$

uz pojedinačna ograničenja:

$$5x_1+\ \ x_2+\ \ 2x_3\leq 2400$$
$$4.5x_1+\ 3x_2+2.2x_3\leq 3000$$
$$1.5x_1+\ 4x_2+\ \ 3x_3\leq 2700$$
$$3x_1+2.5x_2+\ 5x_3\leq 3600$$

i opšte ograničenje o nenegativnosti promenljivih:

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0$$

3. Primer (problem maksimuma)

Pretpostavimo da neko preduzeće za proizvodnju 2 različita proizvoda koristi 4 različita izvora energije (misli se na kapacitet mašina, niz osnovnih i pomoćnih materijala, radna snaga ...). Od izvora energije A ima na raspolaganju 16, od B 10, od C 16, od D 12 jedinica. Za proizvodnju jedne jedinice proizvoda I proizvoda potrebno je iz pojedinih izvora energije 2,2,4,0 jedinica. Nazovimo ove podatke tehničkim koeficijentima I proizvoda. Za II proizvod tehnički koeficijenti su: 4,1,0,4. Zna se da svaki komad I proizvoda osigurava preduzeću 2, a II proizvoda 3 novčane jedinice čistog dohotka. Pitanje je koliko proizvoda od sveke vrste treba da preduzeće proizvede pod datim pretpostavkama ako ima za cilj maksimalni čisti dohodak.

Radi preglednosti, podatke predstavljamo u tabeli 3.

Tabela 3. Potrebni podaci

Izvor energije	Tehnički koeficijenti		Kapacitet
	proizvod I	proizvod II	
A	2	4	16
B	2	1	10
C	4	0	16
D	0	4	12
čist doh. po jedin.	2	3	

Prihvatimo da od I proizvoda preduzeće proizvodi x_1 , a od II x_2 jedinice. Jasno je da ove nepoznate promenljive ne mogu imati negativnu vrednost, tj moraju zadovoljiti uslov:

$$x_1,\ x_2\geq 0 \qquad (1)$$

Ako je za svaki izvor energije potrošnja proporcionalna količini proizvodnje, ostala ograničenja se mogu formulisati sa četiri nejednačine:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16 \qquad (2)$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 10$$
$$4x_1 \leq 16$$
$$4x_2 \leq 12$$

Ove nejednačine pokazuju da se iz pojedinih izvora može koristiti, najviše, raspoloživa količina energije.

Nejednačinama (1) i (2) smo zadali pretpostavke programiranja pomoću matematičkih izraza. Ti izrazi su linearni, jer se obe nepoznate ne javljaju na stepenu višem od prvog.

Parovi vrednosti (x_1 i x_2) koji zadovoljavaju ograničenja definisana u izrazima (1) i (2) su moguća rešenja. Problem je od ovih mogućih rešenja izabrati ono kome odgovara najveći žist dohodak.

Čist dohodak možemo predstaviti izrazom:

$2x_1 + 3x_2$ (3)

I ovaj izraz je linearan i naziva se funkcijom kriterijuma. Njome merimo efektivnost pojedinih programa.

Znači, zadatak je da se odredi onaj par vrednosti (x_1 i x_2) za koji f-ja kriterijuma dostiže najveću vrednost, a da se pri tome uzmu u obzir samo one vrednosti promenljivih koje zadovoljavaju sistem ograničenja datih izrazima (1) i (2).

Znači, matematički model za postavljeni problem bi bio:
odrediti maksimalnu vrednost f-je kriterijuma:

$\max(f) = 2x_1 + 3x_2$

uz pojedinačna ograničenja:

$2x_1 + 4x_2 \leq 16$

$2x_1 + 1x_2 \leq 10$

$4x_1 \leq 16$

$4x_2 \leq 12$

i opšte ograničenje o nenegativnosti promenljivih:

$x_1, x_2 \geq 0$

4. Primer (problem minimuma)

Pretpostavimo da na jednom poljoprivrednom dobru, prema propisima o ishrani stoke, treba da pojedine životinje od hranljivih sastojaka vrste A dobiju najmanje 6, od B najmanje 12, od C najmanje 4 jedinice na dan. Za ishranu stoke, polj. dobru stoje na raspolaganju dve različite stočne hrane. Jedna jedinica ovih sadrži od pojedinih hranljivih sastojaka količine date u tabeli 4.

Tabeli 4. Potrebni podaci

hranljivi sastojci	stočna hrana I	stočna hrana II
A	2	1
B	2	4
C	0	4

Uzmimo da su cene koštanja odgovarajuće stočne hrane 5 i 6 novčanih jedinica.

Označimo količine I stočne hrane sa y_1 , a II sa y_2. Onda ograničenja možemo napisati kao:

$y_1, y_2 \geq 0$ (1)

$2y_1 + y_2 \geq 6$ (2)

$2y_1 + 4y_2 \geq 12$

$4y_2 \geq 4$

Izraz za funkciju kriterijuma je:

$5y_1 + 6y_2$ (3)

Znači, matematički model za postavljeni problem bi bio:
odrediti minimalnu vrednost f-je kriterijuma:

$\min(f)= 5y_1 + 6y_2$

uz pojedinačna ograničenja:

$2y_1 + y_2 \geq 6$

$2y_1 + 4y_2 \geq 12$

$4y_2 \geq 4$

i opšte ograničenje o nenegativnosti promenljivih:

$y_1, y_2 \geq 0$

GEOMETRIJSKI POSTUPAK REŠAVANJA PROBLEMA LINERANOG PROGRAMIRANJA

Kada se formuliše matematički model, sledeća faza je njegovo rešavanje i dobijanje rešenja. Probleme linearnog programiranja se mogu rešavati **geometrijski (grafički) i analitički.**
Dve osobine društvenih problema su:
- da promenljive mogu biti samo nenegativne, tj. pozitivne i nule, ali ne sve nule
- da je međusobna zavisnost promenljivih linearna

Prva osobina ukazuje na oblast u kojoj se mogu istraživati moguća rešenja. Oblast istraživanja mogućih rešenja može biti jednodimenzionalna, dvodimenzionalna, trodimenzionalna i n-to dimenzionalna.

<u>Za jednodimenzionalne oblasti istraživanja</u>:

ako se rešenje zadatka sastoji iz jedne komponente napisane u obliku jednodimenzionalnog vektora $x=(x_1)$, čije se vrednosti nalaze u intervalu $0 \leq x \leq \infty$, kažemo da taj zadatak ima rešenje u jednodimenzionalnoj oblasti.

<u>Za dvodimenzionalne oblasti istraživanja</u>:

neka se rešenje zadatka sastoji iz dve komponente čije su vrednosti x_1 i x_2 i neka je napisano u obliku dvodimenzionalnog vektora $x=(x_1 , x_2)$, tada se moguća rešenja problema nalaze u I kvadrantu pravouglog koordinatnog sistema.

<u>Za trodimenzionalne oblasti istraživanja:</u>

kada se rešenje sastoji iz tri komponente čije su vrednosti x_1, x_2 i x_3 i neka je napisano u obliku trodimenzionalnog vektora $x=(x_1 , x_2 , x_3)$, tada se moguća rešenja nalaze u I oktantu trodimenzionalnog koordinatnog sistema.

<u>Za n-to dimenzionalnu oblast istraživanja:</u>

neka se rešenje sastoji iz n komponeti čije su vrednosti x_1, x_2 ...x_j,... x_n i neka je napisano u obliku n-to dimenzionalnog vektora $x=(x_1 , x_2 ,...x_j,... x_n)$,tada se rešenja nalaze u n-to dimenzionalnom prostoru i to u oblasti koja zadovoljava uslov $x_j \geq 0$, $j =1,2...n$, odnosno
$x=(x_1 , x_2 ,...x_j,... x_n) \geq 0$.

Grafičko rešavanje problema linearnog programiranja je podesno za jedno i dvodimenzionalne probleme, dok za složenije probleme nije podesno.

Primer za objašnjenje grafičkog rešavanja linearnog programiranja

Preduzeće proizvodi proizvode A i B. Zadatak je da se isplanira mesečna proizvodnja proizvoda po vrstama, a da se obezbedi najveća rentabilnost rada. Kao ograničenje pri proizvodnji javljaju se kapaciteti radnih mesta i raspoložive količine materijala. Ograničeni broj radnih mesta, koji zavisi od površine pogona u kome se radii od proizvodne opreme, znače da prpizvoditi može samo određeni broj radnika. Tako, pošto je kapacitet radnih mesta ograničen, dovoljno je znati ukupan fond radnog vremena potrebnog za proizvodnju oba proizvoda. Zna se da je ukupni mesečni fond radnog vremena ukupno 420 norma časova i da je utrošak vremena za proizvodnju proizvoda A - 5 nč, a za proizvod B - 6 nč.

Drugi činilac je materijal za izradu. I za njega treba znati ukupnu raspoloživu količinu, kao i količinu utroška po jedinici proizvoda. Proizvodi se izrađuju od materijala M_1 i M_2 tako da se proizvod A radi samo od materijala M_1, a proizvod B i od M_1 i od M_2 , pri čemu je mesečna potrošnja materijala sledeća: učešće M_1 u proizvodu A je 0,2 t, u B je 0,1 t, dok je M_2 za proizvod B - 0,3 t.

Preduzeće raspolaže mesečno sa 14 t materijala M_1 i 12 t materijala M_2.

Treći podatak sa kojim raspolažemo je da dohodak za proizvod A iznosi 800 dinara, za proizvod B - 1000 dinara po jedinici proizvoda.

Na osnovu ova tri podatka zaključujemo:

Polazni cilj zadatka je zahtev da se odredi realni plan proizvodnje i da se obezbedi najrentabilniji rad. Ako znamo da će rentabilnost biti veća ako je veća ukupna realizacija proizvoda, onda se zahtev sastoji u određivanju takve proizvodnje proizvoda A i B za koju će dohodak biti maksimalan.

Radi preglednosti, od polaznih podatke formirajmo tabelu 5.

Tabela 5. Polazni podaci

proizvod	N^ po jed.pro.	mater. M_1	mater. M_2	dobit
A	5	0.2	0	800
B	6	0.1	0.3	1000
ograničenja (mesečna kol.materijala (t))	420	14	12	

Dalje analiziramo, uvedena ograničenja su vezana za raspoloživi kapacitet i raspoloživi materijal.

Ako pođemo od raspoloživog kapaciteta:

označavanje vršimo na sledeći način - ako x_1i x_2 respektivno vežemo za proizvode A i B, ograničenja vezana za kapacitet radnih mesta možemo analitički izraziti nejednačinom:

$5 x_1+ 6 x_2 \leq 420$

ograničenja vezana za materijal za izradu možemo analitički izraziti nejednačinama:

za materijal M_1: $0{,}2\ x_1 + 0{,}1\ x_2 \leq 14$

za materijal M_2: $0\ x_1 + 0{,}3\ x_2 \leq 12$

Pored ovih pojedinačnih ograničenja, imamo još dva opšta ograničenja. Naime, proizvodnja proizvoda A i B može biti samo nenegativna veličina (tj. pozitivne i nule, ali ne sve nule), pa opšte ograničenje pišemo kao:

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$

Funkcija kriterijuma, označena kao (max)Z, ima analitički oblik:

$(max)Z = 800\ x_1 + 1000\ x_2$

Znači, napisani zajedno f-ja kriterijuma, pojedinačna i opšta ograničenja čine **matematički model**:

$(max)Z = 800\ x_1 + 1000\ x_2$

$0{,}2\ x_1 + 0{,}1\ x_2 \leq 14$

$0\ x_1 + 0{,}3\ x_2 \leq 12$

$5\ x_1 + 6\ x_2 \leq 420$

$x_1,\ \ x_2 \geq 0$

---

1. Prvo što treba uraditi, treba sistem nejednačina prevesti u sistem jednačina, a zatim se grafički redom predstavljaju prave koje odgovaraju tim jednačinama. Biramo pravougli koordinatni sistem u ravni. Da bismo te prave nacrtali, određujemo njihove dve karakteristike - preseke prave sa koordinatnim osama. Tako dolazimo do tačaka:

$A_1(84,0)$ $A_2(70,0)$ $B_1(0,70)$ $B_2(0,140)$ $B_3(0,40)$

Njihovim spajanjem dobijamo prave koje odgovaraju tim pojedinačnim ograničenjima.

p: $800\ x_1 + 1000\ x_2$

p_1: $5\ x_1 + 6\ x_2 = 420$

p_2: $0{,}2\ x_1 + 0{,}1\ x_2 = 14$

p_3: $0{,}3\ x_2 = 12$

---

za p_1: $x_1 = 0,\quad 6x_2 = 420,\quad x_2 = 420 / 6 = 70$

$x_2 = 0,\quad 5x_1 = 420,\quad x_1 = 420 / 5 = 84$

za p_2: $x_1 = 0,\quad 0.1\ x_2 = 14,\quad x_2 = 14 / 0.1 = 140$

$x_2 = 0,\quad 0.2\ x_1 = 14,\quad x_1 = 14 / 0.2 = 70$

za p_3: $x_1 = 0,\quad x_2 = 12 / 0.3 = 40$

$x_2 = 0,\quad x_1 = 0$

---

2. Drugo, prelazimo na istraživanje oblasti u kojoj treba da se nalazi rešenje, pa i samo optimalno rešenje koje treba da da optimalni program proizvodnje.

Jasno je da je ma koji predviđeni program proizvodnje na grafikonu određen tačkom. Analizu vršimo na sledeći način:

Ako je za izvršenje programa potreban čitav fond radnog vremena kojim raspolažemo, onda odgovarajuća tačka na grafikonu mora da se nalazi na pravoj p_1, jer ona uključuje u sebe sve tačke koje zadovoljavaju jednačinu:

$5 x_1 + 6 x_2 = 420$

Gledajući grafik, zapažamo da je najviša tačka preseka T_2 . Ona se nalazi na pravoj p_1 za koju smo rekli da u sebe uključuje sve tačke koje zadovoljavaju gornju jednažinu. Izračunajmo njene vrednosti. Tačka T_2 se nalazi na preseku pravih P_1 i P_3.

$T_2 (P_1 \cap P_3)$

$5 x_1 + 6 x_2 = 420$

$0,3 x_2 = 12$

$x_2 = 12 / 0.3 = 40$

$5 x_1 + 6 x 40 = 420$

$5 x_1 = 420 - 240$

$x_1 = 180 / 5 = 36$

Ovo znači da se za 36 jedinica proizvoda A i 40 jedinica proizvoda B koristi svih 420 N^. Tačka T_2 (36,40) se nalazi na pravoj p_1.Funkcija kriterijuma za T_2 (36,40) postaje jednačina prave koja se takođe može predstaviti na grafiku i iznosi:

$(max)Z = 800 x 36 + 1000 x 40 = 28800 + 40000 = 68800$

Šta je sa tačkom T_1? Tačka T_1 se nalazi na preseku pravih P_1 i P_2. Izračunajmo njene vrednosti.

$T_1 (P_1 \cap P_2)$

$5 x_1 + 6 x_2 = 420$

$0,2 x_1 + 0,1 x_2 = 14 / *10$

$5 x_1 + 6 x_2 = 420$

$2 x_1 + x_2 = 140$

$x_2 = 140 - 2 x_1$

$5 x_1 + 6 (140 - 2 x_1) = 420$

$5 x_1 + 840 - 12 x_1) = 420$

$- 7 x_1 = 420-840$

$7 x_1 = 420$

$x_1 = 60$

$x_2 = 140 - 2 x_1 = 140 - 2*60 = 140-120 = 20$

F-ja kriterijuma za ovu tačku je:

$(max)Z = 800 x 60 + 1000 x 20 = 48000+20000 = 68000$

što je manje od vrednosti za f-ju kriterijuma za tačku T_2 (36,40). Zato se tačka T_1 ne uzima za dalju analizu.

Međutim, možemo imati i takav plan proizvodnje za koji se fond radnog vremena neće koristiti potpuno. Tada će se odgovarajuće tačke nalaziti unutar trougla OA_1B_1. Uopšte rečeno, za bilo koji program koji uzima u obzir ograničenja

$5\ x_1 + 6\ x_2 \leq 420$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

Odgovarajuća tačka ležaće na jednoj stranici trougla OA_1B_1 ili unutar njega. Izlaženjem iz granica ovog trougla, narušićemo bilo koja od ova tri ograničenja.

Sa druge strane, tačka koja karakteriše predviđeni program proizvodnje ne može se nalaziti van granica trougla OA_2B_2, jer bismo narućili ograničenje koje je vezano za postojeću količinu materijala M_1.

Zatim, pored toga, svaki realni program mora da uzme u obzir i raspoloživi materijal M_2. Zato na grafikonu odgovarajuća tačka mora da leži na na pravoj p_3 ili ispod nje.

Zato je jasno da svaka prava na grafikonu predstavlja jedno ograničenje, koje je dato kao uslov postavljenog problema.

Realni program proizvodnje mora da uzme u obzir sva ova ograničenja. Zato bilo koji program proizvodnje mora da odgovara nekoj tački koja se nalazi ili na stranicama petougaonika $OA_2T_1T_2B_3$ ili unutar njega (šrafirana oblast). Samo u granicama ovog petougaonika se ne narušava nijedno od datih ograničenja.

Šta je sa tačkom T_3? Tačka T_3 se nalazi na preseku pravih P_2 i P_3. Ona je van određenog petougaonika, ali izračunajmo njene vrednosti.

$T_3\ (P_2 \cap P_3)$

$0{,}2\ x_1 + 0{,}1\ x_2 = 14\ /\ {*}10$

$0{,}3\ x_2 = 12\ /\ {*}10$

$2\ x_1 + x_2 = 140$

$3\ x_2 = 120$

$x_2 = 120\ /3 = 40$

$2\ x_1 + 40 = 140$

$2\ x_1 = 100$

$x_1 = 50$

F-ja kriterijuma za ovu tačku je:

$(\max)Z = 800 \text{ x } 50 + 1000 \text{ x } 40 = 40000 + 40000 = 80000$

što je veće od vrednosti za f-ju kriterijuma za tačku T_2 (36,40), ali pošto smo zaključili da se samo u granicama petougaonika $OA_2T_1T_2B_3$ ne narušava nijedno od datih ograničenja, a tačka T_3 se nalazi van njega, ne uzimamo je u dalju analizu.

---

3. Tako smo jasno ograničili oblast mogućih rešenja problema. Međutim, u okviru ovih ograničenja postoji veliki broj mogućih programa proizvodnje. Između njih treba odabrati jedan i to onaj koji obezbeđuje najveći dohodak, tj. (max)Z.

Izaberimo bilo koje vrednosti za x_1 i x_2.
NPR: $x_1 = 30$ $x_2 = 20$ (jer je to neka proizvoljna tačka unutar oblasti maksimuma)
Funkcija kriterijuma postaje jednačina prave koja se takođe može predstaviti na grafiku. Tada je:

$800 \times 30 + 1000 \times 20 = 24000 + 20000 = 44000$

Tačke na ovoj pravoj odgovaraju takvim parovima x_1 i x_2 za koje će ukupni dohodak iznositi 44000 dinara. Ali, ova vrednost nije maksimalno moguća vrednost.

$800\, x_1 + 1000\, x_2 = 44000$

Da bismo je grafički predstavili, izračunavamo:

za $x_1 = 0$ $x_2 = 44$
za $x_2 = 0$ $x_1 = 55$

Ova prava je paralelna pravoj koju smo dobili za proizvodni program od $x_1 = 36$ i $x_2 = 40$.

Uzmemo li, opet, nove vrednosti za x_1 i x_2, uvek će odgovarajuće prave biti paralelne sa prethodnim pravama (za $x_1 = 30$ i $x_2 = 20$; $x_1 = 36$ $x_2 = 40$) i biće bliže ili dalje od koordinatnog početka. Nas ne interesuju prave koje su izvan granica petougaonika, pošto iza ovih granica ne postoje moguća rešenja. <u>Nas interesuje prava koja je najudaljenija od koordinatnog početka, a koja ima jednu zajedničku tačku sa petougaonikom, tj. sa oblašću mogućih rešenja.</u>

Znači, rešenje mora da se nalazi u temenima petougaonika $OA_2T_1T_2B_3$. Kroz svako teme petougaonika smo već uz prethodna računanja povukli prave koje predstavljaju funkciju kriterijuma. Ono teme čija je funkcija kriterijuma najudaljenija od koordinatnog početka daje optimalno rešenje, tj. optimalni program. Sa grafika je jasno vidljivo da je to teme (tačka) $T_2(36,40)$. Odnosno, program proizvodnje koji zahteva 36 jedinica proizvoda A i 40 jedinica proizvoda B daće optimalni dohodak od 68800 dinara.

$(\max)Z = 800 \times 36 + 1000 \times 40 = 28800 + 40000 = 68800$

---

za 1. Primer

funkcija kriterijuma:

$maf(f)=24x_1+35x_2$

pojedinačna ograničenja:

$10x_1 + 9x_2 \leq 9900$
$5x_1 + 12x_2 \leq 7200$
$9x_1 + 14x_2 \leq 9600$

opšte ograničenje: $x_1, x_2 \geq 0$

Ograničenja posmatramo kao jednačine.

$10x_1 + 9x_2 = 9900$
$5x_1 + 12x_2 = 7200$
$9x_1 + 14x_2 = 9600$

Svaka od ovih jednačina ograničenja predstavlja pravu u sistemu OX_1X_2. Označimo ih sa p, p_1, p_2 i p_3 i nacrtajmo ih.

p: $24x_1 + 35\,x_2$

p_1: $10\,x_1 + 9\,x_2 = 9900$

p_2: $5\,x_1 + 12\,x_2 = 7200$

p_3: $9x_1 + 14x_2 = 9600$

---

za p_1: $x_1 = 0$, $9x_2 = 9900$, $x_2 = 9900 / 9 = 1100$

$x_2 = 0$, $10x_1 = 9900$, $x_1 = 9900 / 10 = 990$

za p_2: $x_1 = 0$, $12\,x_2 = 7200$, $x_2 = 7200 / 12 = 600$

$x_2 = 0$, $5\,x_1 = 7200$, $x_1 = 7200 / 12 = 1440$

za p_3: $x_1 = 0$, $14x_2 = 9600$, $x_2 = 9600 / 14 \approx 685$

$x_2 = 0$, $9x_1 = 9600$, $x_2 = 9600 / 14 \approx 1066$

Kako imamo opšti uslov da su promenljive nenegativne, to znači da se rešenja moraju nalaziti u prvom kvadrantu i da su ograničena pravama p_1, p_2 i p_3.

Oblast u kojoj se nalazi rešenje je išrafirana. Svaka tačka ove oblasti zadovoljava ograničenja i daje neku vrednost f-je kriterijuma. Zato se kaže da je to oblast mogućih rešenja. Nas interesuje max vrednost f-je kriterijuma, pa znači da treba da nađemo onu tačku ovog šrafiranog dela koja će dati max (f). Takvo rešenje se naziva optimalno, jer za data ograničenja, za date ograničavajuće uslove daje max vrednost f-je kriterijuma.

Uzmimo bilo koje moguće rešenje, tj. bilo koju tačku u šrafiranom delu. Za pravu p uzimamo NPR: tačka M sa $x_1 = 300$ $x_2 = 200$

Kroz tu tačku postavimo pravu koja zadovoljava $24\,x_1 + 35\,x_2 = 14200$ (tj. predstavlja f-ju kriterijuma, tj. z=24 x 300+35 x 200 = 14200) Bilo koja tačka ove prave daje istu vrednost f-je kriterijuma.

Znači, izračunavamo da je:

24 x 300 + 35 x 200 = 14200

pa je:

$24\,x_1 + 35\,x_2 = 14200$

gde je za: $x_1 = 0$ $x_2 \approx 400$

$x_2 = 0$ $x_1 \approx 600$

Da bismo dobili max vrednost, povlačimo pravu paralelnu sa pravom kroz tačku M sve do najudaljenije tačke šrafiranog dela. To je tačka N_2. Zaista, gledajući grafik, zapažamo da je najviša tačka preseka N_2 . Izračunajmo njene vrednosti.

N_2 ($P_2 \cap P_3$)

$5\,x_1 + 12\,x_2 = 7200$ /: 12

$9x_1 + 14x_2 = 9600$

$5/12\ x_1 + x_2 = 600$
$x_2 = 600 - 5/12\ x_1 = 440$
$9\ x_1 + 14(600 - 5/12\ x_1) = 9600$
$9\ x_1 + 8400 - 70/12\ x_1 = 9600$
$9\ x_1 + 8400 - 35/6\ x_1 = 9600$
$(54-35)/6\ x_1 = 9600-8400$
$19/6\ x_1 = 1200$
$x_1 = 1200 / (19/6) = 7200/19 \approx 380$
$x_2 = 600 - 5/12\ (380) \approx 460$

Vrednost f-je kriterijuma za tu tačku je:
$(max)Z = 24 \times 380 + 35 \times 460 = 9120+1610 \approx 25220$
To je max vrednost koju f-ja kriterijuma pri datim ograničenjima može da ima, pa je to optimalno rešenje. Znači, treba proizvoditi 380 jedinica proizvoda A i 460 jedinica proizvoda B da bi iskorišćenje kapaciteta bilo maksimalno.
Da razmotrimo kakva je iskorišćenost kapaciteta na mašinama za date proizvode:
za mašinu M1: 9900-(10x380+9x460)=9900-(3800+4140)=9900-7940=1960
za mašinu M2: 7200-(5x380+12x460)=7200-(1900+5520)=7200-7420=-220
za mašinu M3: 9600-(9x380+14x460)=9600-(3420+6440)=9600-9860=-260
Znači, izračunali smo da je optimalno iskorišćenje kapaciteta oko 25220 N^. Na mašinama M2 i M3 je iskorišćenje kapaciteta iznad optimalnog, ali na mašini M1 neiskorišćenje kapaciteta je 1960N^, odnosno toliko će N^ mašina da stoji. Sa grafika se lako vidi zašto nisu sve mašine potpuno iskorišćene za rešenje koje daje optimum. Sve tri mašine be bile potpuno iskorišćene ako bi se sve tri prave (ograničenja) sekle u istoj tački.

Ako se desi da je prava povučena kroz M paralelna sa nekom od pravih koje predstavljaju ograničenja, onda ima neograničeno mnogo rešenja, a ne samo jedno optimalno rešenje. Takav slučaj je poznat kao degeneracija.

za 2. Primer

funkcija kriterijuma:
$max(f) = 14x_1 + 7x_2 + 10x_3$
pojedinačna ograničenja:
$5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2400$
$4.5x_1 + 3x_2 + 2.2x_3 \leq 3000$
$1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 2700$
$3x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 \leq 3600$
opšta ograničenja:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2400 \\ 4.5x_1 + 3x_2 + 2.2x_3 &= 3000 \\ 1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2700 \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 &= 3600 \end{aligned}$$

imamo sistem od 4 jednačine sa 3 promenljive iz skupa od 4 jednačine

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

znači, postoje 4 sistema: (123), (134), (124), (234)

---

(123):

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2400 \\ 4.5x_1 + 3x_2 + 2.2x_3 &= 3000 \\ 1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2700 \end{aligned}$$

(134):

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2400 \\ 1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2700 \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 &= 3600 \end{aligned}$$

(124):

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2400 \\ 1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2700 \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 &= 3600 \end{aligned}$$

(234):

$$\begin{aligned} 4.5x_1 + 3x_2 + 2.2x_3 &= 3000 \\ 1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2700 \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 &= 3600 \end{aligned}$$

Znači, na ovaj način dobijamo 4 grupe rešenja. Ali, ovaj način rešavanja je moguće izvesti samo u elementarnim zadacima. Za malo složenije probleme je nemoguće naći rešenje ovim putem. NPR. ako imamo 20 ograničenja, što za realne uslove nije mnogo, sa 10 nepoznatih, onda je broj sistema $\begin{Bmatrix} 20 \\ 10 \end{Bmatrix} = 18475$. Zbog toga su razvijene druge metode za nalaženje rešenja linearnog programiranja. Jedna od najpoznatijih i najčešće primenjivanih je tzv Simplex metoda koja omogućava da se na relativno jednostavan način dođe do rešenja. U prvom obliku je razvio Dantzing 1947.

za 3. Primer

funkcija kriterijuma:

$\max(f) = 2x_1 + 3x_2$

pojedinačna ograničenja:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 10 \\ 4x_1 \qquad &\leq 16 \\ 4x_2 &\leq 12 \end{aligned}$$

opšta ograničenja:

$x_1, x_2 \geq 0$

$p: 2x_1 + 3x_2$
$p_1: 2x_1 + 4x_2 = 16$
$p_2: 2x_1 + x_2 = 10$
$p_3: 4x_1 = 16$
$p_4: 4x_2 = 12$

---

za p_1: $x_1=0$ $4x_2=16$ $x_2=16/4$ $x_2=4$
$x_2=0$ $2x_1=16$ $x_1=16/2$ $x_1=8$
za p_2: $x_1=0$ $x_2=10$
$x_2=0$ $2x_1=10$ $x_1=10/2$ $x_1=5$
za p_3: $x_2=0$ $4x_1=16$ $x_1=4$
za p_4: $x_1=0$ $4x_2=12$ $x_2=3$

---

za 4. Primer

funkcija kriterijuma:
$\min(f) = 5y_1 + 6y_2$
pojedinačna ograničenja:
$2y_1 + y_2 \geq 6$
$2y_1 + 4y_2 \geq 12$
$4y_2 \geq 4$
opšta ograničenja:
$x_1, x_2 \geq 0$

$p: 5y_1 + 6y_2$
$p_1: 2y_1 + y_2 = 6$
$p_2: 2y_1 + 4y_2 = 12$
$p_3: 4y_2 = 4$

---

za p_1: $y_1=0$ $y_2=6$
$y_2=0$ $2y_1=6$ $y_1=6/2$ $y_1=3$
za p_2: $y_1=0$ $4y_2=12$ $y_2=12/4$ $y_2=3$
$y_2=0$ $2y_1=12$ $y_1=12/2$ $y_1=6$
za p_3: $y_1=0$ $4y_2=4$ $y_2=1$

<u>5. Primer</u>

funkcija kriterijuma:
$(\min)Z = 2x_1 + 5x_2$
pojedinačna ograničenja:

$3x_1 + 5x_2 \geq 18$
$3x_1 + 2x_2 \geq 12$
$x_1 + 6x_2 \geq 12$

opšta ograničenja:

$x_1, \; x_2 \geq 0$

---

p: $2x_1 + 5x_2$
p_1: $3x_1 + 5x_2 = 18$
p_2: $3x_1 + 2x_2 = 12$
p_3: $x_1 + 6x_2 = 12$

---

za p_1: $x_1 = 0$ $5x_2 = 18$ $x_2 = 18 / 5 = 3.6$
$x_2 = 0$ $3x_1 = 18$ $x_1 = 18 / 3 = 6$

za p_2: $x_1 = 0$ $2x_2 = 12$ $x_2 = 12 / 2 = 6$
$x_2 = 0$ $3x_1 = 12$ $x_1 = 12 / 3 = 4$

za p_3: $x_1 = 0$ $6x_2 = 12 / 6 = 2$
$x_2 = 0$ $x_1 = 12$

Za pravu p uzimamo NPR: $x_1 = 5$ $x_2 = 2$
$2 \times 5 + 5 \times 2 = 10 + 10 = 20$

pa je:

$2x_1 + 5x_2 = 20$

gde je za: $x_1 = 0$ $x_2 = 4$
$x_2 = 0$ $x_1 = 10$

Gledajući grafik, zapažamo da je najniža tačka preseka N_1 . Izračunajmo njene vrednosti.
$N_1 (P_1 \cap P_3)$

$3x_1 + 5x_2 = 18$
$x_1 + 6x_2 = 12$

$x_1 = 12 - 6x_2$

$3(12 - 6x_2) + 5x_2 = 18$
$36 - 18x_2 + 5x_2 = 18$
$36 - 13x_2 = 18$
$-13x_2 = 18 - 36$ / -1
$-13x_2 = -18$
$13x_2 = 18$

$x_2 = 18 / 13 \approx 1.4$

$x_1 = 12 - 6 \times 1.4 = 12 - 8.4 \approx 3.6$

Za N_1 (3.6 ; 1.4) je:

$(min)Z = 2 x_1 + 5 x_2 = 2 \times 3.6 + 5 \times 1.4 = 7.2 + 7.0 = 14.2$

6. Primer

funkcija kriterijuma:

$(max)Z = 2 x_1 + 3 x_2$

pojedinačna ograničenja:

$4 x_1 + 5 x_2 \leq 16$

$-2 x_1 + 3 x_2 \leq 3$

opšta ograničenja:

$x_1, x_2 \geq 0$

p: $2x_1 + 3 x_2$

p_1: $4 x_1 + 5 x_2 = 16$

p_2: $-2 x_1 + 3 x_2 = 3$

za p_1: $x_1 = 0$ $5x_2 = 16$ $x_2 = 16 / 5 = 3.2$

$x_2 = 0$ $4x_1 = 16$ $x_1 = 16 / 4 = 4$

za p_2: $x_1 = 0$ $3 x_2 = 3$ $x_2 = 3 / 3 = 1$

$x_2 = 0$ $-2 x_1 = 3$ $x_1 = 3 / -2 = 1.5$

Za pravu p uzimamo NPR: $x_1 = 2$ $x_2 = 1$

$2 \times 2 + 3 \times 1 = 4+3=7$

pa je:

$2 x_1 + 5 x_2 = 7$

gde je za: $x_1 = 0$ $3x_2 = 7$ $x_2 = 7/3 = 2.3$

$x_2 = 0$ $2x_1 = 7$ $x_1 = 7/2 = 3.5$

Gledajući grafik, zapažamo da je najviša tačka preseka N. Izračunajmo njene vrednosti.

N ($P_1 \cap P_2$)

$4 x_1 + 5 x_2 = 16$

$-2 x_1 + 3 x_2 = 3$

$4 x_1 + 5 x_2 = 16$ / :4

$x_1 = 4 - 5/4\ x_2$

$-2\ (4 - 5/4\ x_2\ ) + 35\ x_2 = 3$

$-8 + 10/4\ x_2 + 3\ x_2 = 3$

$36 - 13\ x_2 = 18$

$(10+12)/4\ x_2 = 3+8$

$22/4\ x_2 = 11$

$x_2 = 11\ /\ (22/4) = 44/22 = 2$

$x_1 = 4 - 5/4 \text{ x } 2 = 4-(10/4)=(16-10)/4=6/4=3/2=1.5$

Za N (1.5 ; 2) je:

$(\min)Z = 2\ x_1 + 5\ x_2 = 2 \text{ x } 1.5 + 3 \text{ x } 2 = 3+6=9$

IZRAŽAVANJE LINEARNOG PROBLEMA U MATRIČNOM OBLIKU

$$(\max) z_0 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \dots \\ b_{m0} \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad n = k + m.$$

U gornjem izrazu figurišu vektori koje možemo označiti na sledeći način:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \dots \\ b_{m0} \end{bmatrix}.$$

Vektore A_j nazivamo vektrima aktivnosti ili kratko aktivnosti. Vektori A_j $(j=1,2,\dots,n)$ predstavljaju vektor kolone koeficijenata u sistemu ograničenja, odnosno kolone matrice A:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \; \dots, \; A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vektor $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ predstavlja moguće rešenje problema linearnog programiranja ako zadovoljava uslov nenegativnosti i sistem ograničenja.

Zavisno od broja pozitivnih komponenti u mogućem rešenju, razlikuje se:

- bazično moguće rešenje (moguće rešenje koje nema više od m pozitivnih komponenti), koje može biti:
  - nedegenerisano rešenje (ima tačno m pozitivnih komponenti)
  - degenerisano rešenje (sadrži manje od m pozitivnih komponenti);
- nebazično moguće rešenje (rešenje sa više od m pozitivnih komponenti).

Optimalno rešenje problema linearnog programiranja je moguće rešenje koje, pored zadovoljavanja uslova nenegativnosti i sistema ograničenja, obezbeđuje da funkcija kriterijuma postigne maksimum ili minimum.

ODREĐIVANJE VEKTORSKE BAZE

Dantzig-ov algoritam (metod inverzne matrice):

1. Matematički model problema se prilagodi za rešavanje, uvođenjem tzv. dopunskih promenljivih, pa se popišu svi vektori u modelu.
2. Od linearno nezavisnih vektora, koji čine bazu vektorskog prostora, formira se matrica $\boldsymbol{B}$.
3. Pronalazi se inverzna matrica $\boldsymbol{B}^{-1}$ matrice B.
4. Izračunava se bazično moguće rešenje problema $Xr = B^{-1} b$.
5. Za pronađeno rešenje računa se vrednost funkcije kriterijuma $fr = CrXr$.
6. Određivanje koordinata svih linearno zavisnih vektora $Xrs = B^{-1}As$
7. Izračunavanje koeficijenata (Cs – fs) za sve linearno zavisne vektore
8. Provera da li je nađeno optimalno rešenje, na osnovu vrednosti koeficijenata $(C_s - f_s)$.
9. Ako rešenje nije optimalno, primena kriterijuma za ulazak vektora u bazu.
10. Određivanje vektora koji treba da napusti bazu.
11. Formiranje nove matrice $\boldsymbol{B}$ (nove baze vektorskog prostora) – povratak na korak 2.

Početnu BAZU čini **m** linearno nezavisnih vektora aktivnosti A_r (r=1,2,...,m) matrice A, tj. Odnosno bazu čini matrica $B=(A_1, A_2, ..., A_m)$ čija je $\det B \neq 0$. Redosled vektora u bazi ne mora biti jednak redosledu vektora aktivnosti u matrici A.

Vrednost bazičnih promenljivih se računa kao:

$$Xr = B^{-1} b$$

Vrednost vanbazičnih promenljivih se računa na osnovu izračunatih vrednosti za bazične promenljive kao:

$$Xrs = B^{-1}As$$

Simplex kriterijum za promenu vektorske baze, tj ulazak novih vektora u bazu:

- ako je Cs-fs ≤ za sve nebazične promenljive, rešenje je optimalno. To znači da druga kombinacija vektora u bazi ne daje veću vrednost funkcije cilja.
- ako je Cs-fs >0 za jedan ili više nebazičnih vektora, u novu bazu ulazi max(Cs-fs)>0, odgovarajuću promenljivu označimo sa j

Simplex kriterijum za izlazak vektora iz baze:

$$\theta = \min_r \frac{x_r}{x_{rj}}, \text{ za Xrj>0}$$

1. PRIMER

Preduzeće proizvodi dva proizvoda, A i B. Tehničko-tehnološki uslovi proizvodnje su dati u tabeli 6.

Tabela 6. Potrebni podaci

postrojenja	potrebno vreme za proizvodnju jedne jedinice proizvoda			ukupno raspol. fond časova
	A	B		
I	3	2		240
II	2.5	5		350
dodit po jedinici	9	10		

Postoje dodatna ograničenja u vezi plasmana proizvoda, prema unapred ocenjenoj tražnji, i to: za proizvod A najviše 65 jedinica, za proizvod B najviše 60 jedinica.

Rešenje:

Matematički model izgleda:

$$(\max)f=9x_1 + 10x_2$$

pri ograničavajućim uslovima:

$$3x_1 + 2x_2 \le 240$$

$$2.5x_1 + 5x_2 \le 350$$

$$x_1 \le 65$$

$$x_2 \le 60$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Poslednja dva uslova se odnose na ograničenu tražnju u posmatranom periodu.

Prvi korak je prevođenje nejednačina u jednačine. To činimo tako što svakoj nejednačini dodajemo po jednu dopunsku promenljivu. Za dopunske promenljive smo rekli da imaju pre svega algebarski smisao. Koeficijenti uz dopunske promenljive u funkciji kriterijuma su nule, što govori da uvođenje tih dopunski promenljivih ne menja suštinu problema, već omogućava brže dolaženje do rešenja. Nakon njihovog uvođenja, matematički model LP glasi

$$(\max)f=9x_1 + 10x_2 + 0x_3+ 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 240$$

$$2.5x_1 + 5x_2 + x_4 =350$$

$$x_1 + x_5 = 65$$

$$x_2 + x_6 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3 ,x_4, x_5 , x_6 \ge 0$$

ili u matričnom obliku:

$$(\max) f = (9\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 350 \\ 65 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \quad A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6 \qquad\qquad b$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq 0$$

Vidimo da je vektor b vektor četvrtog reda i da je ukupan broj promenljivih 6. Znači da bismo dobili početno bazično moguće rešenje, formiramo bazu koja će biti sastavljena od 4 vektora. Najlakše je ako za početno rešenje uzmemo da bazu čine vektori uz dopunske promenljive, tj. ako stavimo da je $x_1= x_2=0$ i da bazu čine jedinični vektori koji odgovaraju dopunskim promenljivim x_3, x_4, x_5, x_6.

bazu čine vektori (A_3, A_4, A_5, A_6) r=3,4,5,6 i s=1,2

$B\ x_r=b\ /\ B^{-1}$

$B\ B^{-1}\ x_r=B^{-1}\ b$

$x_r=B^{-1}\ b$

pošto je B=I, onda je x=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 350 \\ 65 \\ 60 \end{bmatrix}$$

b: $x_3=240$, $x_4=350$, $x_5=65$, $x_6 = 60$, $x_1=0$, $x_2=0$

Rekli smo da se i vektori van baze, a to su A_1, A_2, mogu napisati kao linearna kombinacija bazičnih vektora, tj. ako smo sa **s** označili vektore van baze, odnosno njihove indekse, onda je: $\sum_{r=1}^{m} x_{rs} A_r = A_s$ (s=m+1, m+2,...,n), a odavde $x_{rs}=B^{-1}A_s$. Ovde je s=1,2. Ako uzmemo da je s=1 $x_{r1}=B^{-1}A_1$. (Kako je B jedinična matrica,tj. pošto je B=I, onda je x=b, to je $B^{-1}=B$).

Za s=1 je:

$$\begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{41} \\ x_{51} \\ x_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_1: \quad x_{31}=3, \quad x_{41}=2.5, \quad x_{51}=1, \quad x_{61}=0$$

Za s=2 je:

$$\begin{bmatrix} x_{32} \\ x_{42} \\ x_{52} \\ x_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A_2: $x_{32}=2$, $x_{42}=5$, $x_{52}=0$, $x_{62}=1$

Vrednost funkcije kriterijuma za ovo rešenje je:

$$(f,f_1,f_2)=(C_1\ \ C_2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_6 \end{bmatrix} = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 240 & 3 & 2 \\ 350 & 2.5 & 5 \\ 65 & 1 & 0 \\ 60 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

Znači: $f=0$, $f_1=0$, $f_2=0$ **(***)**

Da vidimo da li je ovo rešenje optimalno, tj. pod brojem 3. <u>Ako je</u> C_s-$f_s \leq 0$ <u>za sve nebazične vektore (s), rešenje je optimalno</u>.

Nađimo f_s:

(***)-drugačije računanje za f_1 i f_2

Za s=1:

$$f_1 = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Za s=2:

$$f_2 = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Tražimo C_s-f_s za s=1,2: C_1-f_1=9-0=9

C_2-f_2=10-0=10

Vidi se da uslov optimalnosti C_s-$f_s \leq 0$ nije zadovoljen, pa rešenje nije optimalno.

Sada vršimo promenu baze na osnovu kriterijuma, koji glasi: <u>Ako je</u> C_s-$f_s>0$ <u>za jedan ili više nebazičnih vektora, tada se u bazu uključuje onaj vektor A_s sa najmanje jednim</u> $x_{rs}>0$ <u>za koje je</u>

C_j-f_j=max (C_s-f_s)

Imamo da je za s=j=2 ova razlika max. To znači da $\mathbf{A_2} \rightarrow \mathbf{B}$ (ulazi u bazu).

(Kao što se primenjuje, ovde je veći koeficijent u f-ji kriterijuma odredio ulazak vektora A_2 u bazu, jer su f_1 i f_2 jednaki 0. U praksi se često veći koeficijent u f-ji kriterijuma uzima
kao osnov za ulazak vektora u bazu, bez prethodnih izračunavanja, što ne mora uvek da bude tačno.)

Koji vektor se izbacuje iz baze?

$$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min(\frac{x_r}{x_{rj}}), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim količnikom. Znači, ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je $x_{ij}>0$, vektor A_i treba izbaciti iz baze.

Znači, prema rešenjima za **b** i **A_2**, imamo:

$$\frac{x_3}{x_{32}} = \frac{240}{2} = 120 \qquad \frac{x_4}{x_{42}} = \frac{350}{5} = 70 \qquad \frac{x_5}{x_{52}} = \frac{65}{0} = \infty \qquad \frac{x_6}{x_{62}} = \frac{60}{1} = 60$$

Znači, za i=r=6 ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_6 izlazi iz baze, tj. **$B \to A_6$.**

Odnosno, promena u bazi se simbolički predstavlja kao **$A_2 \to B \to A_6$**

sada bazu čine vektori B=(A_2, A_3, A_4, A_5) r=2,3,4,5

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sada se u drugoj iteraciji postupak ponavlja sve dok $C_s - f_s \leq 0$.

Sada tražimo inverznu matricu:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^T = B' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{transponovana matrica (kao prvi korak)}$$

Kao drugi korak kod nalaženja inverzne matrice označili smo određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{14} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$B_{21} = -\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{23} = -\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{24} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{22} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \qquad B_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{34} = -\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5$$

$$B_{41}=-\begin{bmatrix}5 0 1\\ 0 0 0\\ 1 0 0\end{bmatrix}=0 \quad B_{42}=\begin{bmatrix}2 0 1\\ 1 0 0\\ 0 0 0\end{bmatrix}=0 \quad B_{43}=-\begin{bmatrix}2 5 1\\ 1 0 0\\ 0 1 0\end{bmatrix}=-1 \quad B_{44}=\begin{bmatrix}2 5 0\\ 1 0 0\\ 0 1 0\end{bmatrix}=0$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\det B=2\cdot B_{11}+5\cdot B_{12}+0\cdot B_{13}+1\cdot B_{14}=2\cdot 0+5\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot(-1)=-1$$

(iz transponovane)

inverzna matrica je:

$$B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}=\frac{1}{|B|}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Pošto je:

$x_r=B^{-1}\, b$

$$\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}240\\ 350\\ 65\\ 60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\\ 120\\ 50\\ 65\end{bmatrix}$$

$x_2=60$ $x_3=120$ $x_4=50$ $x_5=65$

Sada je s=1,6

za s=1:

$$\begin{bmatrix}x_{21}\\ x_{31}\\ x_{41}\\ x_{51}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\ 2.5\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 2.5\\ 1\end{bmatrix}$$

$x_{21}=0$ $x_{31}=3$ $x_{41}=2.5$ $x_{51}=1$

za s=6:

$$\begin{bmatrix}x_{26}\\ x_{36}\\ x_{46}\\ x_{56}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -5\\ 0\end{bmatrix}$$

$x_{26}=1$ $x_{36}=-2$ $x_{46}=-5$ $x_{56}=0$

Znači: $x_1=0$, $x_2=60$, $x_3=120$, $x_4=50$, $x_5=65$, $x_6=0$

Vrednost f-je kriterijuma:

$$f=(C_1\ \ C_2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_6 \end{bmatrix} = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ 120 \\ 50 \\ 65 \\ 0 \end{bmatrix} = 600$$

Da vidimo da li je ovo rešenje optimalno, tj. Ako je C_s-$f_s \le 0$ za sve nebazične vektore (s), rešenje je optimalno. Nađimo f_s:

Za s=1:

$$f_1 = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Za s=6:

$$f_6 = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10$$

Tražimo C_s-f_s za s=1,6:

C_1-f_1=9-0=9

C_6-f_6=0-10=-10

Vidi se da uslov optimalnosti C_s-$f_s \le 0$ nije zadovoljen, pa rešenje nije optimalno.

Sada vršimo promenu baze na osnovu 1. kriterijuma, koji glasi: Ako je C_s-f_s>0 za jedan ili više nebazičnih vektora, tada se u bazu uključuje onaj vektor A_s sa najmanje jednim x_{rs}>0 za koje je

C_j-f_j=max (C_s-f_s)

Imamo da je za s=j=9 ova razlika max (vrednosti < 0 se ne razmatraju).

To znači da **A_1 →B** (ulazi u bazu).

Koji vektor se izbacuje iz baze?

$$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min(\frac{x_r}{x_{rj}}), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim količnikom. Znači, ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je x_{ij}>0, vektor A_i treba izbaciti iz baze.

Znači, prema rešenjima za **b** i **A_1**, imamo:

$$\frac{x_2}{x_{21}} = \frac{60}{0} = \infty \qquad \frac{x_3}{x_{31}} = \frac{120}{3} = 40 \qquad \frac{x_4}{x_{41}} = \frac{50}{2.5} = 20 \qquad \frac{x_5}{x_{51}} = \frac{65}{1} = 65$$

Znači, za i=r=4 ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_4 izlazi iz baze, tj. **B→A₄.**

Odnosno, promena u bazi se simbolički predstavlja kao $\mathbf{A_1 \rightarrow B \rightarrow A_4}$

sada bazu čine vektori B=(A_1, A_2, A_3, A_5) r=1,2,3,5

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2.5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sada se u drugoj iteraciji postupak ponavlja sve dok C_s-$f_s \le 0$.

Sada tražimo inverznu matricu:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2.5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kao drugi korak kod nalaženja inverzne matrice označili smo određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{12} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \qquad B_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{14} = -\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5$$

$$B_{21} = -\begin{bmatrix} 2.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{23} = -\begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{24} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2.5$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -2.5 \qquad B_{32} = -\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -3 \qquad B_{33} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{34} = -\begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -10$$

$$B_{41} = -\begin{bmatrix} 2.5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{42} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad B_{43} = -\begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -2.5 \qquad B_{44} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -5$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ -2.5 & +3 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -2.5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 3 \cdot B_{11} + 2.5 \cdot B_{12} + 1 \cdot B_{13} + 0 \cdot B_{14} = 3 \cdot 0 + 2.5 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) = -2.5$$

(iz transponovane)

inverzna matrica je:

$$B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}=\frac{1}{|B|}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -2.5\\ -2.5 & +3 & 0 & -10\\ 0 & 1 & -2.5 & -5\end{bmatrix}=\frac{1}{-2.5}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -2.5\\ -2.5 & +3 & 0 & -10\\ 0 & 1 & -2.5 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1.2 & 0 & 4\\ 0 & -0.4 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Pošto je:

$x_r=B^{-1}\,b$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1.2 & 0 & 4\\ 0 & -0.4 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}240\\ 350\\ 65\\ 60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 60\\ 60\\ 45\end{bmatrix}$$

$x_1=20$ $x_2=60$ $x_3=60$ $x_5=45$

Sada je $s=4,6$

za $s=4$:

$$\begin{bmatrix}x_{14}\\ x_{24}\\ x_{34}\\ x_{54}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1.2 & 0 & 4\\ 0 & -0.4 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4\\ 0\\ -1.2\\ -0.4\end{bmatrix}$$

$x_{14}=0.4$ $x_{24}=0$ $x_{34}=-1.2$ $x_{54}=-0.4$

za $s=6$:

$$\begin{bmatrix}x_{16}\\ x_{26}\\ x_{36}\\ x_{56}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1.2 & 0 & 4\\ 0 & -0.4 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}$$

$x_{16}=-2$ $x_{26}=1$ $x_{36}=4$ $x_{56}=2$

Znači:

$x_1=20$, $x_2=60$, $x_3=60$, $x_4=0$, $x_5=45$, $x_6=0$

Vrednost f-je kriterijuma:

$$f=(C_1\ \ C_2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_6\end{bmatrix}=(9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix}20\\ 60\\ 60\\ 0\\ 45\\ 0\end{bmatrix}=9\cdot 20+10\cdot 60=780$$

Da vidimo da li je ovo rešenje optimalno, tj. <u>Ako je</u> $C_s-f_s \le 0$ <u>za sve nebazične vektore (s), rešenje je optimalno</u>. Nađimo f_s:

Za $s=4$:

$$f_4 = (9\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0) \cdot \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -1.2 \\ 0 \\ -0.4 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \cdot 0.4 = 3.6$$

Za s=6:

$$f_6 = (9\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \cdot (-2) + 10 \cdot 1 = -18 + 10 = -8$$

Tražimo C_s-f_s za s=4,6:

C_4-f_4=0-3.6=-3.6<0

C_6-f_6=0-(-8)=8>0

Vidi se da uslov optimalnosti C_s-$f_s \leq 0$ nije zadovoljen, pa rešenje nije optimalno.

Sada vršimo promenu baze na osnovu kriterijuma, koji glasi: <u>Ako je</u> C_s-f_s>0 <u>za jedan ili više nebazičnih vektora, tada se u bazu uključuje onaj vektor A_s sa najmanje jednim</u> x_{rs}>0 <u>za koje je</u>

C_j-f_j=max (C_s-f_s)

Imamo da je za s=j=6 ova razlika max (vrednosti < 0 se ne razmatraju).

To znači da $\mathbf{A_6} \rightarrow \mathbf{B}$ (ulazi u bazu).

Koji vektor se izbacuje iz baze?

$$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min(\frac{x_r}{x_{rj}}), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim količnikom. Znači, ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je x_{ij}>0, vektor A_i treba izbaciti iz baze.

Znači, prema rešenjima za **b** i $\mathbf{A_6}$, imamo:

$$\frac{x_1}{x_{16}} = \frac{20}{-2} = -10\ (\textit{samo za } x_{rs} \geq 0) \qquad \frac{x_2}{x_{26}} = \frac{60}{1} = 60 \qquad \frac{x_3}{x_{36}} = \frac{60}{4} = 15 \qquad \frac{x_5}{x_{56}} = \frac{45}{12} = 22.5$$

Znači, za i=r=3 ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_3 izlazi iz baze, tj. $\mathbf{B \rightarrow A_3}$.

Odnosno, promena u bazi se simbolički predstavlja kao $\mathbf{A_6 \rightarrow B \rightarrow A_3}$

sada bazu čine vektori B=(A_1, A_2, A_5, A_6) r=1,2,5,6 i s=3,4

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2.5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada se u drugoj iteraciji postupak ponavlja sve dok C_s-$f_s \leq 0$.

Sada tražimo inverznu matricu:

$$B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 2.5 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad B'=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Kao drugi korak kod nalaženja inverzne matrice označili smo određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=5\qquad B_{12}=-\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=-2\qquad B_{13}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=0\qquad B_{14}=-\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$B_{21}=-\begin{bmatrix}2.5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=-2.5\qquad B_{22}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=3\qquad B_{23}=-\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=0\qquad B_{24}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$B_{31}=\begin{bmatrix}2.5 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=-5\qquad B_{32}=-\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=2\qquad B_{33}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0\\ 2 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=10\qquad B_{34}=-\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$B_{41}=-\begin{bmatrix}2.5 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=2.5\qquad B_{42}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=-3\qquad B_{43}=-\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0\\ 2 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0\qquad B_{44}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=10$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB=\begin{bmatrix}5 & -2 & 0 & 0\\ -2.5 & 3 & 0 & 0\\ -5 & 2 & 10 & 0\\ 2.5 & -3 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

$$\det B=3\cdot B_{11}+2.5\cdot B_{12}+1\cdot B_{13}+0\cdot B_{14}=3\cdot 5+2.5\cdot(-2)+1\cdot 0+0\cdot 0=10$$

(iz transponovane)

inverzna matrica je:

$$B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}=\frac{1}{|B|}\begin{bmatrix}5 & -2 & 0 & 0\\ -2.5 & 3 & 0 & 0\\ -5 & 2 & 10 & 0\\ 2.5 & -3 & 0 & 10\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & -2 & 0 & 0\\ -2.5 & 3 & 0 & 0\\ -5 & 2 & 10 & 0\\ 2.5 & -3 & 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.2 & 0 & 0\\ -0.25 & 0.3 & 0 & 0\\ -0.5 & 0.2 & 1 & 0\\ 0.25 & -0.3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Pošto je:

$x_r=B^{-1}\,b$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.2 & 0 & 0\\ -0.25 & 0.3 & 0 & 0\\ -0.5 & 0.2 & 1 & 0\\ 0.25 & -0.3 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}240\\ 350\\ 65\\ 60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50\\ 45\\ 15\\ 15\end{bmatrix}$$

$x_1=50$ $x_2=45$ $x_5=15$ $x_6=15$

Sada je s=3,4

za s=3:

$$\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{53} \\ x_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.3 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.25 \\ -0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$x_{13}=0.5$ $x_{23}=-0.25$ $x_{53}=-0.5$ $x_{63}=0.25$

za s=4:

$$\begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{54} \\ x_{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.3 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

$x_{14}=-0.2$ $x_{24}=0.3$ $x_{54}=0.2$ $x_{64}=-0.3$

Znači:

$x_1=50$, $x_2=45$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=15$, $x_6=15$

Vrednost f-je kriterijuma:

$$f=(C_1\ \ C_2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_6 \end{bmatrix} = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = 9 \cdot 50 + 10 \cdot 45 = 900$$

Da vidimo da li je ovo rešenje optimalno, tj. Ako je C_s-$f_s \leq 0$ za sve nebazične vektore (s), rešenje je optimalno. Nađimo f_s:

Za s=3:

$$f_3 = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.25 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} = 9 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.25 = 2$$

Za s=4:

$$f_4 = (9\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.3 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix} = -9 \cdot 0.2 - 10 \cdot 0.3 = 1.2$$

Tražimo C_s-f_s za s=3,4:
$C_3-f_3=0-2=-2<0$
$C_4-f_4=0-1.2=-1.2<0$
Vidi se da je uslov optimalnosti $C_s-f_s \leq 0$ zadovoljen, pa je rešenje optimalno. To znači da se vrednost f-je kriterijuma ne može povećati promenom vektroske baze. Maksimalna vrednost f-je kriterijuma je f=900.

SIMPLEX TABELA

Simplex tabela je tehnika kojom se dolazi do optimalnog rešenja Simplex metodom na sažetiji, odnosno lakši način. Ovu tehmiku su razradili naučnici Cooper i Henderson 1954. godine. Postupak određivanja optimalnog rešenja se sastoji u tome da se od koeficijenata funkcije kriterijuma i sistema ograničavajućih uslova sastavi tabela.

Opšti model linearnog programiranja, nakon uvođenja dopunskih promenljivih je:

$$\max(f)=c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_s x_s + \ldots + c_n x_n + \ldots + 0\, x_{n+m}$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1s} x_s + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2s} x_s + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{ms} x_s + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

Prebacimo kolonu koeficijenata a_{rs} **(r=1,2...m)** sa promenljivom x_s na desnu stranu:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1 - a_{1s} x_s$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 - a_{2s} x_s \qquad (1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m - a_{ms} x_s$$

Videli smo da obično za prvo bazično rešenje uzimamo dopunske promenljive $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$. To znači da su tada ostale promenljive: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su jednake 0 (nuli). Znači, početno bazično moguće rešenje je:

$$x_{n+1}=b_1$$
$$x_{n+2}=b_2 \qquad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n+m}=b_m$$

Za ovo bazično rešenje vrednost funkcije kriterijuma je 0, baš zato što su dopunske promenljive bazične sa koeficijentima u funkciji kriterijuma jednakim 0.

Tražimo novo moguće bazično rešenje na sledeći način:
pretpostavimo da nebazična promenljiva x_s nije jednaka 0, nego da uzima određene pozitivne vrednosti . Izraz (1) se može napisati kao:

$$x_{n+1}=b_1-a_{1s}x_s$$
$$x_{n+2}=b_2-a_{2s}x_s \qquad (3)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$\mathbf{x_{n+m}=b_m-a_{ms}x_s}$

ili uopšte:

$\mathbf{x_{n+r}=b_r-a_{rs}x_s \quad (r=1,2,...,m)(s=1,2,...,n)}$ (4)

Prema tome kakav je znak koeficijenata $\mathbf{a_{rs}}$**,** kad $\mathbf{x_s}$ raste, promenljive $\mathbf{x_{n+r}}$ **, (r=1,2,...,m)** će se menjati, što znači:

neke će rasti (za $\mathbf{a_{rs}<0}$), neke će ostati nepromenjene (za $\mathbf{a_{rs}=0}$), a neke će imati vrednost manju (za $\mathbf{a_{rs}>0}$). Nas posebno interesuje zadnji slučaj. Zašto?

Zato što se za $\mathbf{a_{rs}>0}$ može odabrati $\mathbf{x_s}$ tako da jedna od promenljivih $\mathbf{x_{n+r}}$ postane =0. Na ovaj način se može eliminisati jedna od baznih promenljivih $\mathbf{x_{n+r}}$**.** Pitanje je samo koju promenljivu eliminisati. Pošto nijedna od promenljivih $\mathbf{x_{n+r}}$ ne može biti negativna, uslov za eliminaciju se dobija iz (4) stavljanjem da je $\mathbf{x_{n+r}}\geq 0$, tj:

$\mathbf{b_r-a_{rs}x_s\geq 0}$ ili: $x_s \leq \dfrac{b_r}{a_{rs}} \quad za \quad a_{rs}>0$

Da bi ovaj uslov bio zadovoljen, od svih količnika $\mathbf{b_r / a_{rs}}$ **(r=1,2,...m)** bira se onaj najmanje vrednosti. Ako sa **r=i** označimo promenljivu za koju se ostvaruje min količnik, dolazimo do uslova za eliminaciju bazične promenljive $\mathbf{x_i}$:

$$\theta = \min(\frac{b_r}{a_{rs}}) = \frac{b_i}{a_{is}} \quad za \quad a_{rs}>0 \qquad (5)$$

Kada odredimo baz.promenljivu koju eliminišemo iz baze, precrtavamo **i**-tu vrstu.

Što se tiče vektora koji treba da uđu bazu, tj. promenljiva $\mathbf{x_s}$ koja treba da zameni promenljivu $\mathbf{x_i}$, ranije smo rekli da je to promenljiva za koju je simplex kriterijum $\mathbf{c_s- f_s}>\mathbf{0}$

Međutim, u praksi je usvojen približan kriterijum. Izbor promenljive $\mathbf{x_s}$ vrši se na osnovu vrednosti koeficijenta $\mathbf{c_s}$ u funkciji kriterijuma. Ako je koeficijent $\mathbf{c_s}$ veći, pre je verovatno da će unošenje odgovarajuće promenljive $\mathbf{x_s}$ u bazu dati veću vrednost funkcije kriterijuma. Ovo ne mora uvek biti tačno. Može se reći da se izbor promenljive $\mathbf{x_s}$ vrši prema najvećoj vrednosti koeficijenata $\mathbf{c_s}$, tj. kriterijum za izbor nove bazične promenljive je:

$c_i=\max(c_s)>0 \quad (s=1,2,,...,n)$ (6)

Kada odredimo koju promenljivu eliminisati iz baze, precrtavamo **j**-tu kolonu.

Presek j-te kolone i i-te vrste je STOŽER.

Postupak eliminacije i unošenje novih promenljivih u bazu radi se sve dok je $\mathbf{c_s}>\mathbf{0}$ za nebazične promenljive. Kada je $\mathbf{c_s<0}$ za sve nebazične promenljive, došli smo do optimalnog rešenja (ovo se objašnjava time što unošenje ma koje nebazične promenljive x_s sa negativnim koeficijentom $c_s<0$ ne može povećati vrednost f-je kriterijuma, nego je samo može smanjiti).

Prilikom određivanja koju promenljivu treba eliminisati iz baze, prema uslovu (5) može se desiti da količnik b_r / a_{rs} da iste vrednosti (minimalan i ars>0) za dve ili više vrednosti r, pa se ne može odrediti kriterijum za eliminaciju, tj postoji više promenljivih za koje je ispunjen uslov - slučaj degeneracije.

Zaključujemo, simplex tabela umesto algebarskih relacija koristi tabelarni način prikazivanja matematičkog modela LP. Postupak se svodi na to da se sukcesivnim putem odredi druga slična tabela sa novim bazičnim promenljivim i to sve dotle dok se ne dođe do optimalnog rešenja, tj. dok ne budu zadovoljeni kriterijumi optimalnosti. Uzastopne tabele odgovaraju postupcima koje smo ranije izvodili preko matrica.

Izgled Simplex tabele je dat u tabeli 8.

Tabela 8 Simplex tabela

1	2	1 2 ... n	n+1 n+2 .... n+m	b_r / a_{rj}
x_b	b	x_1 x_2 ... x_n	x_{n+1} x_{n+2} ... x_{n+m}	
x_{n+1} x_{n+2} ... x_{n+m}	b_1 b_2 ... b_m	a_{11} a_{12} ... a_{1n} a_{21} a_{22} ... a_{2n} .... a_{m1} a_{m2} ... a_{mn}	1 0 ... 0 0 1 ... 0 .... 0 0 ... 1	
	f	c_1 c_2 ... c_n	0 0 ... 0	

Simplex tabela se formira na sledeći način:
koeficijenti uz promenljive x_1, x_2,...x_n,...,x_{n+1},...,x_{n+m} prepišu kako su dati sistemom j-na. U prvoj koloni su napisane sve dopunske promenljive (rekli smo da je najlakše za prvo bazično moguće rešenje uzeti baš njh). Koeficijenti b_1, b_2,...,b_m se pišu u drugoj koloni. U poslednjoj vrsti su napisani koeficijenti f-je kriterijuma redom koji odgovara promenljivim u zaglavlju tabele. Pošto su koeficijenti f-je kriterijuma uz dopunske promenljive 0, to se u produžetku poslednje vrste nalaze 0. Na dnu druge kolone označena je vrednost f-je kriterijuma.

Na ovaj način je sastavljena početna tabela, zatim se ispituju uslovi za promenu bazičnih promenljivih (uslovi 5 i 6). Kada se zamene bazične promenljive, dobija se nova tabela. Vrednost novih bazičnih promenljivih se određuju preko obrazaca:

$$x_r^{'} = b_r - \frac{b_i}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$x_j^{'} = \frac{b_i}{a_{ij}} \tag{7}$$

Koeficijente a_{rs} u novoj tabeli se određuju preko obrazaca:

$$a_{rs}^{'} = a_{rs} - \frac{a_{is}}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$a_{is}^{'} = \frac{a_{is}}{a_{ij}} \tag{8}$$

Koeficijenti uz f-ju kriterijuma (poslednja vrsta tabele) određuju se iz:

$$c_s^{'} = c_s - \frac{a_{is}}{a_{ij}} \cdot c_j \tag{9}$$

Vrednost f-je kriterijuma za novu bazu je:

$$f' = f + \frac{b_i}{a_{ij}} \cdot c_j \tag{10}$$

Pošto je početna baza sastavljena od dopunskih promenljivih, koeficijenti c_s su 0, pa i f-ja kriterijuma ima vrednost 0. U sledećim tabelama se to menja.

1.PRIMER

Dat je model LP:

$(max)f=9\ x_1 + 10\ x_2$

pri pojedinačnim ograničavajućim uslovima:

$3\ x_1 + 2\ x_2 \leq 240$

$2.5\ x_1 + 5\ x_2 \leq 350$

$x_1 \leq 65$

$x_2 \leq 60$

i opštem ograničenju o nenegativnosti promenljivih:

$x_1, x_2 \geq 0$

Nakon uvođenja dopunskih promenljivih:

$(max)f=9\ x_1 + 10\ x_2 +0\ x_3 + 0\ x_4 + 0\ x_5 +0\ x_6$

$3\ x_1 + 2\ x_2 + x_3 = 240$

$2.5\ x_1 + 5\ x_2 + x_4 = 350$

$x_1 + x_5 = 65$

$x_2 + x_6 = 60$

$x_1, x_2, ..., x_6 \geq 0$

(postojeće oznake: j-kolona vektora koji ulazi u bazu , i-vrsta vektora koji izlazi iz baze, s-kolona, r-vrsta)

Tabela 0:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_r	b_r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_r / a_{rj}
x_3	240	3	2	1	0	0	0	240/2
x_4	350	2,5	5	0	1	0	0	350/5
x_5	65	1	0	0	0	1	0	65/0=∞
x_6	60	0	1	0	0	0	1	60/1
	0	9	10	0	0	0	0	

Početno bazično rešenje je :

$x_3=240$, $x_4=350$, $x_5=65$, $x_6=60$, $x_1=0$, $x_2=0$,

Za dato početno rešenje f-ja kriterijuma ima vrednost 0 (0 na dnu druge kolone).

Tražimo novo bazično moguće rešenje na osnovu kriterijuma (5) i (6):

$\theta = \min(\frac{b_r}{a_{rs}}) = \frac{b_i}{a_{is}} \quad za \quad a_{rs} > 0$ i $c_i=\max(c_s)>0$ $(s=1,2,,...,n)$

Ili posmatramo kriterijum optimalnosti: $\max_s (C_s-f_s)=\max_2 (C_2-f_2)=\max_2 (10-0)=10$

Pošto je $c_2 > c_1$ (iz poslednje vrste se vidi da je 10 > 9), a $c_2=10$, znači da x_2, odnosno $\mathbf{A_2 \rightarrow B}$**,** treba da uđe u novu bazu. Znači **j=2**. Precrtamo j-tu kolonu.

Traži se bazična promenljiva koju treba eliminisati iz baze, tj. $\theta=\min_r (b_r / a_{rs})$, kao:

$b_3 / a_{32} = b_1 / a_{12} = 240 / 2 = 120$
$b_4 / a_{42} = b_2 / a_{22} = 350 / 5 = 70$
$b_5 / a_{52} = b_3 / a_{32} = 65 / 0 =$ beskonačno
$b_6 / a_{62} = b_4 / a_{42} = 60 / 1 = 60$ ovaj količnik ima minimalnu vrednost za r=**i=4**. Precrtavamo i-tu vrtstu.
Ili : $\min_r (x_r / x_{rj})$ što je isto kao i ovo gore.
U koloni 1 pod rednim brojem 4 se nalazi promenljiva x_6 koja se eliminiše iz baze, tj **$B \to A_6$.**

U tabeli zaokružujemo r=4 i s=2, tj. $a_{rs} = a_{42} = 1$. Zaokruženi broj se naziva Stožer ili Pivot.
Sada se po već poznatim obrascima preračunavaju promenljive. Nove bazične promenljive su: **x_2, x_3, x_4, x_5**. Novu bazu čine**: $B=(A_2, A_3, A_4, A_5)$ r=2,3,4,5 j=2 i=4**

Koristeći obrazac (7):

$$x_r' = b_r - \frac{b_i}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$x_j' = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

računaju se vrednosti novih bazičnih promenljivih **(i=4, j=2)**

$$x_2 = b_2 - \frac{b_6}{a_{62}} \cdot a_{22} = b_2 - \frac{b_4}{a_{42}} \cdot a_{22} = \frac{60}{1} = 60$$

$$x_3 = b_3 - \frac{b_6}{a_{62}} \cdot a_{32} = b_3 - \frac{b_4}{a_{42}} \cdot a_{32} = 240 - \frac{60}{1} \cdot 2 = 120$$

$$x_4 = b_4 - \frac{b_6}{a_{62}} \cdot a_{42} = b_4 - \frac{b_4}{a_{42}} \cdot a_{42} = 350 - \frac{60}{1} \cdot 5 = 50$$

$$x_5 = b_5 - \frac{b_6}{a_{62}} \cdot a_{52} = b_5 - \frac{b_4}{a_{42}} \cdot a_{52} = 65 - \frac{60}{1} \cdot 0 = 65$$

Koeficijenti se računaju po obrascu (8):

$$a_{rs}' = a_{rs} - \frac{a_{is}}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$a_{is}' = \frac{a_{is}}{a_{ij}}$$

za **s=1,2,3,4,5** i **r=1,2,3,4**

$a'_{11}=a_{11}-(a_{41} / a_{42})\, a_{12}$	$a'_{12}=a_{12}-(a_{42} / a_{42})\, a_{12}$	$a'_{13}=a_{13}-(a_{43} / a_{42})\, a_{12}$
$a'_{14}=a_{14}-(a_{44} / a_{42})\, a_{12}$	$a'_{15}=a_{15}-(a_{45} / a_{42})\, a_{12}$	$a'_{16}=a_{16}-(a_{46} / a_{42})\, a_{12}$
$a'_{21}=a_{21}-(a_{41}/ a_{42})\, a_{22}$	$a'_{22}=a_{22}-(a_{42}/ a_{42})\, a_{22}$	$a'_{23}=a_{23}-(a_{43}/ a_{42})\, a_{22}$
$a'_{24}=a_{24}-(a_{44}/ a_{42})\, a_{22}$	$a'_{25}=a_{25}-(a_{45}/ a_{42})\, a_{22}$	$a'_{26}=a_{26}-(a_{46}/ a_{42})\, a_{22}$
$a'_{31}=a_{31}-(a_{41} / a_{42})\, a_{32}$	$a'_{32}=a_{32}-(a_{42} / a_{42})\, a_{32}$	$a'_{33}=a_{33}-(a_{43} / a_{42})\, a_{32}$
$a'_{34}=a_{34}-(a_{44} / a_{42})\, a_{32}$	$a'_{35}=a_{35}-(a_{45} / a_{42})\, a_{32}$	$a'_{36}=a_{36}-(a_{46} / a_{42})\, a_{32}$
$a'_{41}=a_{41}-(a_{41} / a_{42})\, a_{42}$	$a'_{42}=a_{42}-(a_{42} / a_{42})\, a_{42}$	$a'_{43}=a_{43}-(a_{43} / a_{42})\, a_{42}$
$a'_{44}=a_{44}-(a_{44} / a_{42})\, a_{42}$	$a'_{45}=a_{45}-(a_{45} / a_{42})\, a_{42}$	$a'_{46}=a_{46}-(a_{46} / a_{42})\, a_{42}$

za **s=2** i **r=1,2,3,4**
itd.... za s=3,4,5,6 i r=1,2,3,4:

$s=1$: $s=2$: $s=3$: $s=4$: $s=5$: $s=6$:

$a'_{11}=3-2\cdot\frac{0}{1}=3$ $a'_{12}=2-2\cdot\frac{1}{1}=0$ $a'_{13}=1-2\cdot\frac{0}{1}=1$ $a'_{14}=0-\frac{0}{1}2=0$ $a'_{15}=0-\frac{0}{1}2=0$ $a'_{16}=0-\frac{1}{1}2=-2$

$a'_{21}=2.5-5\cdot\frac{0}{1}=2{,}5$ $a'_{22}=2.5-\frac{0}{1}5=0$ $a'_{23}=0-\frac{0}{1}5=0$ $a'_{24}=1-\frac{0}{1}5=1$ $a'_{25}=0-\frac{0}{1}5=0$ $a'_{26}=0-\frac{1}{1}5=-5$

$a'_{31}=1-0\cdot\frac{0}{1}=1$ $a'_{32}=0-\frac{1}{1}0=0$ $a'_{33}=0-\frac{0}{1}0=0$ $a'_{34}=0-\frac{0}{1}0=0$ $a'_{35}=1-\frac{0}{1}0=1$ $a'_{36}=0-\frac{1}{1}0=0$

$a'_{41}=0-1\cdot\frac{0}{1}=0$ $a'_{42}=1-\frac{1}{1}1=1$ $a'_{43}=0-\frac{0}{1}1=0$ $a'_{44}=0-\frac{0}{1}1=0$ $a'_{45}=0-\frac{0}{1}1=0$ $a'_{46}=1-\frac{1}{1}1=1$

Koristeći obrasce (9) i (10):

$c'_s=c_s-\frac{a_{is}}{a_{ij}}\cdot c_j$ i $f'=f+\frac{b_i}{a_{ij}}\cdot c_j$

Određuju se novi koeficijenti c'_s i vrednost f-je kriterijuma za novo bazično rešenje:

$c'1=c_1-(a_{41}/a_{42})\,c_2=9-(0/1)\,10=9$
$c'_2=c_2-(a_{42}/a_{42})\,c_2=10-(1/1)\,10=0$
$c'_3=c_3-(a_{43}/a_{42})\,c_2=0-(0/1)\,10=0$
$c'_4=c_4-(a_{44}/a_{42})\,c_2=0-(0/1)\,10=0$
$c'_5=c_5-(a_{45}/a_{42})\,c_2=0-(0/1)\,10=0$
$c'_6=c_6-(a_{46}/a_{42})\,c_2=0-(1/1)\,10=-10$
$f'=0+(b_4/a_{42})\,c_2=0+(60/1)\,10=600$

Formira se nova Simplex tabela: $B=(A_3, A_4, A_5, A_2)$ r=3,4,5,2

Tabela 1:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	b_r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_r / a_{rj}
x_3	120	3	0	1	0	0	-2	120/3
x_4	50	2,5	0	0	1	0	-5	50/2.5
x_5	65	1	0	0	0	1	0	65/1
x_2	60	0	1	0	0	0	1	60/0=∞
	600	9	0	0	0	0	-10	

Traži se novo bazično moguće rešenje na osnovu kriterijuma (5) i (6):

$\theta=\min(\frac{b_r}{a_{rs}})=\frac{b_i}{a_{is}}$ za $a_{rs}>0$ i $c_i=\max(c_s)>0$ (s=1,2,,...,n)

Ili se posmatra kriterijum optimalnosti: $\max_s(C_s-f_s)=\max_1(c_1-f_1)=9$

Pošto je c_1 maksimalna, a $c_1=9$, znači da x_1, odnosno $\mathbf{A_1\rightarrow B}$, treba da uđe u novu bazu. Znači **j=1**. Precrta se j-ta kolona.

Koja se bazična promenljiva eliminiše iz baze:

$\theta=(b_r/a_{rs})$ su:

$b_3/a_{31}=b_1/a_{11}=120/3=40$
$b_4/a_{41}=b_2/a_{21}=50/2.5=20$ ovaj količnik ima minimalnu vrednost za r=i=2. Precrtava se i-ta vrtsta.

$b_5 / a_{51} = b_3 / a_{31} = 65 / 1 = 65$
$b_2 / a_{21} = b_4 / a_{41} = 60 / 0 =$ beskonačno
Ili : $\min_r (x_r / x_{rj})$ što je isto kao i ovo gore.
U koloni 1 pod rednim brojem 2 se nalazi promenljiva x_4 koja se eliminiše iz baze, tj **$B \rightarrow A_4$.**

U tabeli se zaokruži r=2 i s=3, tj. $a_{rs} = a_{23} = 2.5$

U bazu ulazi $A_1 (A_1 \rightarrow B)$ a izlazi A_4 $(B \rightarrow A_4)$ (precrtavamo ih)

Nove bazične promenljive su: x_1, x_2, x_3, x_5. **$B=(A_1, A_2, A_3, A_5)$ r=1,2,3,5 i=2 j=1**
Koristeći obrazac (7):

$$x_r' = b_r - \frac{b_i}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$x_j' = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

Računaju se vrednosti novih bazičnih promenljivih (i=2, j=1)

$$x_1 = b_1 - \frac{b_2}{a_{21}} \cdot a_{11} = \frac{50}{2.5} = 20$$

$$x_2 = b_2 - \frac{b_2}{a_{21}} \cdot a_{21} = 60 - \frac{50}{2.5} = 60$$

$$x_3 = b_3 - \frac{b_2}{a_{21}} \cdot a_{31} = 120 - \frac{50}{2.5} \cdot 3 = 60$$

$$x_5 = b_5 - \frac{b_2}{a_{21}} \cdot a_{51} = 65 - \frac{50}{2.5} \cdot 1 = 45$$

Koeficijenti se računaju po obrascu (8):

$$a_{rs}' = a_{rs} - \frac{a_{is}}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$a_{is}' = \frac{a_{is}}{a_{ij}}$$

za s=1,2,3,4,,5,6 i r=1,2,3,4 j=2 i=1

$a'_{11}=a_{11}-(a_{21} / a_{21})\, a_{11}$ $a'_{12}=a_{12}-(a_{22} / a_{21})\, a_{11}$ $a'_{13}=a_{13}-(a_{23} / a_{21})\, a_{11}$
$a'_{14}=a_{14}-(a_{24} / a_{21})\, a_{11}$ $a'_{15}=a_{15}-(a_{25} / a_{21})\, a_{11}$ $a'_{16}=a_{16}-(a_{26} / a_{21})\, a_{11}$
$a'_{21}=a_{21}-(a_{21} / a_{21})\, a_{21}$ $a'_{22}=a_{22}-(a_{22} / a_{21})\, a_{21}$ $a'_{23}=a_{23}-(a_{23} / a_{21})\, a_{21}$
$a'_{24}=a_{24}-(a_{24} / a_{21})\, a_{21}$ $a'_{25}=a_{25}-(a_{25} / a_{21})\, a_{21}$ $a'_{26}=a_{26}-(a_{26} / a_{21})\, a_{21}$
$a'_{31}=a_{31}-(a_{21} / a_{21})\, a_{31}$ $a'_{32}=a_{32}-(a_{22} / a_{21})\, a_{31}$ $a'_{33}=a_{33}-(a_{23} / a_{21})\, a_{31}$
$a'_{34}=a_{34}-(a_{24} / a_{21})\, a_{31}$ $a'_{35}=a_{35}-(a_{25} / a_{21})\, a_{31}$ $a'_{36}=a_{36}-(a_{26} / a_{21})\, a_{31}$
$a'_{41}=a_{41}-(a_{21} / a_{21})\, a_{41}$ $a'_{42}=a_{42}-(a_{22} / a_{21})\, a_{41}$ $a'_{43}=a_{43}-(a_{23} / a_{21})\, a_{41}$
$a'_{44}=a_{44}-(a_{24} / a_{21})\, a_{41}$ $a'_{45}=a_{45}-(a_{25} / a_{21})\, a_{41}$ $a'_{46}=a_{46}-(a_{26} / a_{21})\, a_{41}$

$s=1$: $s=2$: $s=3$: $s=4$: $s=5$: $s=6$:

$a'_{11}=3-3\cdot\frac{25}{25}=0$ $a'_{12}=0-\frac{0}{2.5}3=0$ $a'_{13}=1-\frac{0}{1}3=1$ $a'_{14}=0-\frac{1}{25}\cdot 3=-1.2$ $a'_{15}=0-\frac{0}{0}3=0$ $a'_{16}=-2-\cdot\frac{-5}{2.5}3=0$

$a'_{21}=2.5-\frac{2.5}{2.5}2.5=1$ $a'_{22}=5-\frac{5}{2.5}2.5=0$ $a'_{23}=0-\frac{0}{2.5}2.5=0$ $a'_{24}=1-\frac{1}{2.5}2.5=0.4$ $a'_{25}=0-\frac{0}{2.5}2.5=0$

$a'_{26}=0-\frac{0}{2.5}2.5=-2$

$a'_{31}=1-\frac{2.5}{2.5}1=0$ $a'_{32}=0-\frac{5}{2.5}1=0$ $a'_{33}=0-\frac{0}{2.5}1=0$ $a'_{34}=0-1\cdot\frac{1}{25}=-0.4$ $a'_{35}=1-\frac{0}{2.5}1=1$

$a'_{36}=0-\frac{0}{2.5}1=2$

$a'_{41}=0-\frac{2.5}{2.5}0=0$ $a'_{42}=1-\frac{5}{2.5}0=1$ $a'_{43}=0-\frac{0}{2.5}0=0$ $a'_{44}=0-0\cdot\frac{1}{2.5}=0$ $a'_{45}=0-\frac{0}{2.5}0=0$

$a'_{46}=1-\frac{0}{2.5}0=1$

Koristeći obrasce (9) i (10):

$$c'_s=c_s-\frac{a_{is}}{a_{ij}}\cdot c_j \qquad \text{i} \qquad f'=f+\frac{b_i}{a_{ij}}\cdot c_j$$

Određuju se novi koeficijenti c'_s i vrednost f-je kriterijuma za novo bazično rešenje:

$c'1=c_1-(a_{21}/a_{21})\ c_1=9-(2.5/2.5)\ 9=0$

$c'_2=c_2-(a_{22}/a_{21})\ c_1=0-(0/2.5)\ 9=0$

$c'_3=c_3-(a_{23}/a_{21})\ c_1=0-(0/2.5)\ 9=0$

$c'_4=c_4-(a_{24}/a_{21})\ c_1=0-(0.4/2.5)\ 9=-3.6$

$c'_5=c_5-(a_{25}/a_{21})\ c_1=0-(0/2.5)\ 9=0$

$c'_6=c_6-(a_{26}/a_{21})\ c_1=0-(-2/2.5)\ 9=8$

$f'=600+(b_2/a_{21})\ c_1=600+(50/2.5)\ 9=780$

Formira se nova Simplex tabela:

Tabela 2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	b_r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_r / a_{rj}
x_3	60	0	0	1	-1.2	0	4	15
x_1	20	1	0	0	0.4	0	-2	-10
x_5	45	0	0	0	-0.4	1	2	22.5
x_2	60	0	1	0	0	0	1	60
	780	0	0	0	-3.6	0	8	

Traži se novo bazično moguće rešenje na osnovu kriterijuma (5) i (6):

$\theta=\min(\frac{b_r}{a_{rs}})=\frac{b_i}{a_{is}}$ *za* $a_{rs}>0$ i $c_i=\max(c_s)>0$ $(s=1,2,,...,n)$

Ili se posmatra kriterijum optimalnosti: $\max_s(C_s-f_s)=\max_6(c_6-f_6)=8$

Pošto je c_6 maksimalna, a c_6=8, znači da x_6, odnosno **$A_6 \rightarrow B$,** treba da uđe u novu bazu. Znači **j=6**. Precrta se j-ta kolona.

Koja se bazična promenljiva eliminiše iz baze:

$\min_r (b_r / a_{rs})$ su:

$b_3 / a_{36}=b_1 / a_{16}=60 / 4=15$ ovaj količnik ima minimalnu vrednost za r=i=1. Precrtava se i-ta vrtsta.

$b_1 / a_{16}=b_2 / a_{26} = 20 / -2=-10$

$b_5 / a_{56}=b_3 / a_{36} = 45 / 2 =22.5$

$b_2 / a_{26}=b_4 / a_{46} = 60 / 1 = 60$

Ili : $\min_r (x_r / x_{rj})$ što je isto kao i ovo gore.

U koloni 6 pod rednim brojem 1 se nalazi promenljiva x_3 koja se eliminiše iz baze, tj **$B \rightarrow A_3$.**

U tabeli se zaokružuje r=1 i s=4, tj. $a_{rs}=a_{14}=-1.2$

U bazu ulazi A_6 ($A_6 \rightarrow B$) a izlazi A_3 ($B \rightarrow A_3$) (precrtavamo ih)

Nove bazične promenljive su: x_1, x_2, x_5, x_6. **B=(A_1, A_2, A_5, A_6) r=3,2,5,6 i=1 j=6**

Koristeći obrazac (7):

$$x_r' = b_r - \frac{b_i}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$x_j' = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

računaju se vrednosti novih bazičnih promenljivih (i=1, j=6)

$$x_1 = b_1 - \frac{b_1}{a_{16}} \cdot a_{16} = 20 - \frac{60}{4}(-2) = 50$$

$$x_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{16}} \cdot a_{26} = 60 - \frac{60}{4}1 = 45$$

$$x_5 = b_5 - \frac{b_1}{a_{16}} \cdot a_{56} = 45 - \frac{60}{4} \cdot 2 = 15$$

$$x_6 = b_6 - \frac{b_1}{a_{16}} \cdot a_{66} = \frac{60}{4} \cdot 1 = 15$$

Koeficijenti se računaju po obrascu (8):

$$a_{rs}' = a_{rs} - \frac{a_{is}}{a_{ij}} \cdot a_{rj} \qquad r \neq i$$

$$a_{is}' = \frac{a_{is}}{a_{ij}}$$

za s=1,2,3,4,,5,6

$a'_{11}=a_{11}-(a_{11} / a_{16})\, a_{16}$ $a'_{12}=a_{12}-(a_{12} / a_{16})\, a_{16}$ $a'_{13}=a_{13}-(a_{13} / a_{16})\, a_{16}$

$a'_{14}=a_{14}-(a_{14} / a_{16})\, a_{16}$ $a'_{15}=a_{15}-(a_{15} / a_{16})\, a_{16}$ $a'_{16}=a_{16}-(a_{16} / a_{16})\, a_{16}$

$a'_{11} = \frac{0}{4} = 0 \quad a'_{12} = \frac{0}{4} = 0 \quad a'_{13} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad a'_{14} = \frac{-1.2}{4} = -0.3$

$a'_{15} = \frac{0}{4} = 0 \quad a'_{16} = \cdot\frac{4}{4} = 1$

$a'_{21} = \frac{2.5}{2.5} = 1 \quad a'_{22} = 0 \quad a'_{23} = 0.5 \quad a'_{24} = -0.2 \quad a'_{25} = 0 \quad a'_{26} = 0$

$a'_{31} = 1 \quad a'_{32} = 0 \quad a'_{33} = -0.5 \quad a'_{34} = 0.2 \quad a'_{35} = 1 \quad a'_{36} = 0$

$a'_{51} = 0 \quad a'_{52} = 1 \quad a'_{53} = -0.25 \quad a'_{54} = -0.3 \quad a'_{55} = 0 \quad a'_{56} = 0$

Koristeći obrasce (9) i (10):

$c'_s = c_s - \frac{a_{is}}{a_{ij}} \cdot c_j$ i $f' = f + \frac{b_i}{a_{ij}} \cdot c_j$

Određuju se novi koeficijenti c'_s i vrednost f-je kriterijuma za novo bazično rešenje:

$c'1=c_1-(a_{11} / a_{16})\ c_6=0-(0/4)\ 8=0$

$c'_2= c_2-(a_{12} / a_{16})\ c_6=0-(0/4)\ 8=0$

$c'_3= -2$

$c'_{4=}-1.2$

$c'_5=0$

$c'_6=0$

$f'=780+(b_1 /a_{16})\ c_6 =780+ (60/4)\ 8=900$

Zadnjom iteracijom se dobija Simplex tabela 3, sa optimalnim vrednostima.

Tabela 3. Zadnja iteracija

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	b_r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_r / a_{rj}
x_6	15	0	0	0.25	-0.30	0	1	
x_1	50	1	0	0.5	-0.20	0	0	
x_5	15	0	0	-0.50	0.20	1	0	
x_2	45	0	1	-0.25	-0.30	0	0	
	900	0	0	-2	-1.2	0	0	

MODIFICIRANI OBLICI SISTEMA-slučaj jednačina

Uopšte, sistemi ograničenja u praktičnim primerima mogu se izraziti na različite načine: sistemom nejednačina, sistemom jednačina u celini ili sistemom jednačina u pojedinim relacijama.
NPR:

$\max(f)=c_1 x_1 +c_2 x_2+...+ c_n x_n$

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 +...+a_{1n} x_n = b_1$ **(1)**

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 +...+ a_{2n} x_n = b_2$

....

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 +... +a_{mn} x_n = b_m$

$\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n \geq 0}$

ili:

$$\mathbf{max(f) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n}$$

$$\mathbf{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \leq b_1} \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\mathbf{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2}$$

$$\mathbf{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$\mathbf{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \geq b_m}$$

$$\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n \geq 0}$$

U prethodnim izlaganjima je razmatran slučaj kada su ograničavajući uslovi dati u vidu nejednačina i to oblika ≤ 0. To je slučaj uvođenja tzv. **dopunskih promenljivih** x_{n+r} (r=1,2,...m), čime se sistem nejednačina prevodi u sistem od m jednačina sa n+m promenljivih. Početno bazično rešenje se lako određuje, jer ga čine dopunske promenljive. Nakon toga se primenjuju simplex kriterijumi. U uzastopnim iteracijama u bazu se uvode efektivne promenljive, a izbacuju dopunske, sve do određivanja optimalnog rešenja. Ono uglavnom sadrži efektivne promenljive, ali to ne znači da i dopunske promenljive ne mogu ostati u bazičnom rešenju. Na ovaj način se rešava standardni problem maksimuma.

U slučaju sistema prikazanog u jednakosti (1), postupak je sličan, samo se u ovom slučaju uvode tzv. **veštačke promenljive** $x_{n+r\ 0}$ (r=1,2,...m). U funkciji kriterijuma koeficijenti uz veštačke promenljive su označeni kao (-M), gde je M relativno veliki konačan broj.

Posle uvođenja veštačkih promenljivih, sistem (1) postaje:

$$\mathbf{max(f) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n - M\, x_{n+10} - M\, x_{n+20}\ ... - M\, x_{n+m\,0}}$$

$$\mathbf{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n + x_{n+10} \qquad = b_1}$$

$$\mathbf{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n + \qquad x_{n+20} \quad = b_2}$$

$$\mathbf{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$\mathbf{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n + \qquad x_{n+m\,0} = b_m}$$

$$\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+10}, ..., x_{n+m\,0} \geq 0}$$

U matričnom obliku:

$$\mathbf{max(f) = (c_1\ c_2\ ...c_n\ -M\ ...-M)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \\ x_{n+10} \\ ... \\ x_{n+m0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} & 1 & 0 & ...0 \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} & 0 & 1 & ...0 \\ \multicolumn{6}{l}{................................} \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} & 0 & 0 & ...1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \\ x_{n+10} \\ ... \\ x_{n+m0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

$x=(x_1, x_2,...,x_n,...,x_{n+m\,0}) \geq 0$

Problem se rešava na taj način što se stavi da su sve efektivne promenljive jednake 0. Tada je:
(max)f= -M (x_{n+10}+...+$x_{n+m\,0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0...0 \\ 0 & 1...0 \\ \multicolumn{2}{l}{........} \\ 0 & 0...1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{n+10} \\ x_{n+20} \\ ... \\ x_{n+m0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

odakle za b ≥ 0 postoji početno bazično rešenje, sastavljeno samo od veštačkih promenljivih, tj:

$x_{n+10} = b_1$
$x_{n+20} = b_2$
....
$x_{n+m\,0} = b_m$

Primenom poznatih sismplex kriterijuma iz baze se postepeno izbacuju veštačke promenljive, a uvode efektivne, uvećavajući tako f-ju kriterijuma.

Uslov optimalnosti: svi fs-Cs≥0,
ako jedan nije u novu bazu ulazi min (fs-Cs) <0.

Razlika između dopunskih i veštačkih promenljivih

Dopunske promenljive predstavljaju deo sistema ograničavajućih uslova, tj. predstavljaju vezu između sistema jednačina i nejednačina.
Veštačke promenljive nisu deo sistema ograničavajućih uslova. One su samo privremeno unete u sistem i nemaju nikakvog značenja. Daljim iteracijama se one eliminišu iz baze, pa u optimalnom rešenju ne može biti nijedan od njih (dopunske promenljive mogu ostati u bazičnom rešenju i to dosta često).

Pri rešavanju problema sa veštačkim promenljivim, mogu nastati tru slučaja:
1. Posle niza uzastopnih iteracija dolazi se do optimalnog rešenja, a iz optimalne baze su eliminisane sve veštačke promenljive.
2. Zadovoljen je kriterijum optimalnosti, ali se u optimalnoj bazi pored efektivnih nalaze i veštačke promenljive sa vrednostima 0. To znači da u optimalnoj bazi ima više uslova nego što je potrebno, ali oni međusobno ne protivureče.
3. Zadovoljen je kriterijum optimalnosti, ali se u optimalnoj bazi pored efektivnih nalaze i veštačke promenljive koje nisu sve jednake 0. To znači da ne postoji optimalno rešenje, jer ili su ograničavajući uslovi protivurečni ili ne postoji moguće rešenje. Znači, problem nema rešenja.

Ovaj metod je poznat i kao M-metod.

PRIMER:

$(\max)f=0.2\,x_1+0.1\,x_2+0.3\,x_3$
$2\,x_2+x_3=100$
$2\,x_1+x_2+2\,x_3=250$
$x_1=40$
$x_1,\,x_2,\,x_3\geq 0$

Posle uvođenja veštačkih promenljivih x_4, x_5, x_6 dobija se:

$(\max)f=0.2\,x_1+0.1\,x_2+0.3\,x_3-M\,(x_4+x_5+x_6)$
$2\,x_2+x_3+x_4=100$
$2\,x_1+x_2+2\,x_3+x_5=250$
$x_1+x_6=40$
$x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5,\,x_6\geq 0$

U matričnom obliku:

$$(\max)f=(0.2\quad 0.1\quad 0.3\quad -M\quad -M\quad -M)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 2\ 1\ 2\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 250 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$

$x=(x_1,\,x_2,\ldots x_6)\geq 0$

Za određivanje početnog bazičnog rešenja stavlja se da je $x_1=x_2=x_3=0$. Početna baza je sastavljena od veštačkih promenljivih. Tako se lako dolazi do početnog bazičnog rešenja za vektor b, kao i do rešenja za nebazične vektore A_1, A_2, A_3.

Početnu bazu čine vektori (A_4, A_5, A_6) r=4,5,6

$B\,x_r=b\ /\ B^{-1}$
$B\,B^{-1}\,x_r=B^{-1}\,b$
$x_r=B^{-1}\,b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 250 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$x_4=100$, $x_5=250$, $x_6=40$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$

Vektori van baze, a to su A_1, A_2, A_3, mogu se napisati kao linearna kombinacija bazičnih vektora, tj. sa **s** su označeni vektori van baze, onda je: $\sum_{r=1}^{m} x_{rs}A_r=A_s$ (s=m+1, m+2,...,n), odnosno $x_{rs}=B^{-1}A_s$.

Za s=1 je:

$$\begin{bmatrix} x_{41} \\ x_{51} \\ x_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_{41}=0, \quad x_{51}=2, \quad x_{61}=1$$

Za s=2 je:

$$\begin{bmatrix} x_{42} \\ x_{52} \\ x_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_{42}=2, \quad x_{52}=1, \quad x_{62}=0$$

za s=3 je:

$$\begin{bmatrix} x_{43} \\ x_{53} \\ x_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_{43}=1, \quad x_{53}=2, \quad x_{63}=0$$

Vrednost funkcije kriterijuma za ovo rešenje je:

$$f=(C_1\ C_2\ C_3\ \ -M\ \ -M\ \ -M) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_6 \end{bmatrix} = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ \ -M\ \ -M\ \ -M) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 250 \\ 40 \end{bmatrix} = -390M$$

Treba ispitati da li je ovo rešenje optimalno. Treba izračunati sve f_s:

Za s=1:

$$f_1 = (0.2 0.1 0.3 - M - M - M) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3M$$

Za s=2:

$$f_2 = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ \ -M\ \ -M\ \ -M) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3M$$

Za s=3:

$$f_3 = (0.2\;\;0.1\;\;0.3\;\;-M\;\;-M\;\;-M)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\\0\end{bmatrix} = -3M$$

Vrednost f-je kriterijuma za vektor b i ostale nebazične vektore je:

f=-390 M $\quad$ f_1=-3M $\quad$ f_2=-3M $\quad$ f_3=-3M

Simplex kriterijum zbog negativnih koeficijenata u f-ji kriterijuma za veštačke promenljive je **$\min_s (f_s - c_s) < 0$:**

f_1-c_1=-3M-0.2 $\quad$ f_2-c_2=-3M-0.1 $\quad$ f_3-c_3=-3M-0.3

Uslov optimalnosti nije zadovoljen, pa rešenje nije optimalno.

Za s=j=3 je zadovoljen uslov. To znači da $\mathbf{A_3 \to B}$ (ulazi u bazu).

Koji vektor se izbacuje iz baze?

$$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min\left(\frac{x_r}{x_{rj}}\right), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim pozitivnim količnikom. Znači, ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je $x_{ij}>0$, vektor A_i treba izbaciti iz baze.

Znači:

$$\frac{x_4}{x_{43}} = \frac{100}{1} = 100 \qquad \frac{x_5}{x_{53}} = \frac{250}{2} = 125 \qquad \frac{x_6}{x_{63}} = \frac{40}{0} = \infty$$

Za i=r=4 ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_4 izlazi iz baze, tj. $\mathbf{B \to A_4}$.

Nova baza je $\mathbf{B=(A_3, A_5, A_6)}$.

U sledećoj iteraciji treba naći inverznu matricu:

$$B = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad B^T = B' = \begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad (\textit{kao prvi korak u trazenju invezne matrice})$$

Drugi korak kod nalaženja inverzne matrice je određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = 1\cdot 1-(0\cdot 0) = 1 \qquad B_{12} = -\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} = 0\cdot 1-(0\cdot 0) = 0 \qquad B_{13} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = 0$$

$$B_{21} = -\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix} = -2 \qquad B_{22} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = 1 \qquad B_{23} = -\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix} = 0$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix}2&0\\1&0\end{bmatrix} = 0 \qquad B_{32} = -\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = 0 \qquad B_{33} = \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix} = 1$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 1 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{12} + 0 \cdot B_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

inverzna matrica je:

$$B^{-1} = \frac{B^*}{|B|} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pošto je:

$x_r = B^{-1}\, b$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 250 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$ $x_3=100$ $x_5=50$ $x_6=40$

Sada je **s=1,2,4:**

za s=1:

$$\begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{51} \\ x_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ $x_{31}=0$ $x_{51}=2$ $x_{61}=1$

za s=2:

$$\begin{bmatrix} x_{32} \\ x_{52} \\ x_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$ $x_{32}=2$ $x_{52}=-3$ $x_{62}=0$

za s=4:

$$\begin{bmatrix} x_{34} \\ x_{54} \\ x_{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ $x_{34}=1$ $x_{54}=-2$ $x_{64}=0$

vrednosti funkcije kriterijuma za nađena rešenje su:

$$f = (0.2 \;\; 0.1 \;\; 0.3 \;\; -M \;\; -M \;\; -M) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix} = (30 - 50M - 40M) = 30 - 90M$$

Treba ispitati da li je ovo rešenje optimalno. Računaju se svi f_s:

Za s=1:

$$f_1 = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ -M\ \ -M\ \ -M)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\2\\1\end{bmatrix} = -3M$$

Za s=2:

$$f_2 = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ -M\ \ -M\ \ -M)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\\-3\\0\end{bmatrix} = 0.3\cdot 2-(-3)M = 0.6+3M$$

Za s=4:

$$f_4 = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ -M\ \ -M\ \ -M)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-2\\0\end{bmatrix} = 0.3-(-2)M = 0.3+2M$$

Vrednost f-je kriterijuma za vektor b i ostale nebazične vektore je:
f=30-90M $\qquad$ f_1=-3M $\qquad$ f_2=0.6+3M $\qquad$ f_4=0.3+2M

Simplex kriterijum zbog negativnih koeficijenata u f-ji kriterijuma za veštačke promenljive je **$\min_s$ (f_s-c_s)<0:**
f_1-c_1=-3M-0.2 $\qquad$ f_2-c_2=3M+0.5 $\qquad$ f_4-c_4=3M+0.3
Uslov optimalnosti nije zadovoljen, pa rešenje nije optimalno.
Za s=j=1 je zadovoljen uslov, pošto je **(f_1-c_1)<0**. To znači da **$A_1 \rightarrow B$** (ulazi u bazu).
Koji vektor se izbacuje iz baze?

$$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min\left(\frac{x_r}{x_{rj}}\right), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim pozitivnim količnikom. Ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je x_{ij}>0, vektor A_i treba izbaciti iz baze.
Znači:

$$\frac{x_3}{x_{31}} = \frac{100}{0} = \infty \qquad \frac{x_5}{x_{51}} = \frac{50}{2} = 25 \qquad \frac{x_6}{x_{61}} = \frac{40}{1} = 40$$

Za i=r=5 ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_5 izlazi iz baze, tj. **$B \rightarrow A_5$.**

Nova baza je **B=(A_1, A_3, A_6).**

Traži se inverzna matrica:

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\quad B^T=B'=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad (kao\ prvi\ korak\ u\ trazenju\ invezne\ matrice)$$

Drugi korak kod nalaženja inverzne matrice je određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}=2\qquad B_{12}=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=-1\qquad B_{13}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}=0$$

$$B_{21}=-\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}=-2\qquad B_{22}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}=0\qquad B_{23}=-\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}=0$$

$$B_{31}=\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix}=-2\qquad B_{32}=-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=1\qquad B_{33}=\begin{bmatrix}0&2\\1&2\end{bmatrix}=-2$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-2&0&0\\-2&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\det B=0\cdot B_{11}+2\cdot B_{12}+1\cdot B_{13}=0\cdot 2+2\cdot(-1)+0\cdot 0=-2$$

inverzna matrica je:

$$B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}=\frac{1}{|B|}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-2&0&0\\-2&1&-2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-2&0&0\\-2&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0.5&0\\1&0&0\\1&-0.5&1\end{bmatrix}$$

Pošto je:

$x_r=B^{-1}\,b$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0.5&0\\1&0&0\\1&-0.5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}100\\250\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\100\\15\end{bmatrix}$$

$x_1=25$ $x_3=100$ $x_6=15$

Sada je **s=2,4,5:**

za s=2:

$$\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{32}\\x_{62}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0.5&0\\1&0&0\\1&-0.5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5\\2\\1.5\end{bmatrix}$$

$x_{12}=-1.5$ $x_{32}=2$ $x_{62}=1.5$

za s=4:

$$\begin{bmatrix}x_{14}\\x_{34}\\x_{64}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0.5&0\\1&0&0\\1&-0.5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$x_{14}=-1$ $x_{34}=1$ $x_{64}=1$

za s=5:

$$\begin{bmatrix}x_{15}\\x_{35}\\x_{65}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0.5&0\\1&0&0\\1&-0.5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\0\\-0.5\end{bmatrix}$$

$x_{15}=0.5$ $x_{35}=0$ $x_{65}=-0.5$

vrednosti funkcije kriterijuma za nađena rešenje su:

$$f = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ \ -M\ \ -M\ \ -M)\cdot\begin{bmatrix}25\\0\\100\\0\\0\\15\end{bmatrix} = 0.2\cdot 25 + 0.3\cdot 100 + 15\cdot(-M) = 35-15M$$

Treba ispitati da li je ovo rešenje optimalno. Računaju se svi f_s:

Za s=2:

$$f_2 = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ \ -M\ \ -M\ \ -M)\cdot\begin{bmatrix}-1.5\\0\\2\\0\\0\\1.5\end{bmatrix} = 0.3-1.5M$$

Za s=4:

$$f_4 = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ \ -M\ \ -M\ \ -M)\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 0.1-M$$

Za s=5:

$$f_5 = (0.2\ \ 0.1\ \ 0.3\ \ -M\ \ -M\ \ -M)\cdot\begin{bmatrix}0.5\\0\\0\\0\\0\\-0.5\end{bmatrix} = 0.1+0.5M$$

Vrednost f-je kriterijuma za vektor b i ostale nebazične vektore je:

f=35-15M $\quad$ f_2=0.3-1.5M $\quad$ f_4=0.1-M $\quad$ f_5=0.1+0.5M

Simplex kriterijum zbog negativnih koeficijenata u f-ji kriterijuma za veštačke promenljive je **$\min_s (f_s-c_s)<0$:**

f_2-c_2=0.2-1.5M $\quad$ f_4-c_4=0.1 $\quad$ f_5-c_5=0.1+1.5M

Uslov optimalnosti nije zadovoljen, pošto je samo **(f_2-c_2)<0**, pa rešenje nije optimalno.

Za s=j=2 je zadovoljen uslov, pošto je **(f_2-c_2)<0**. To znači da **$A_2 \rightarrow B$** (ulazi u bazu).

Koji vektor se izbacuje iz baze?

$$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min(\frac{x_r}{x_{rj}}), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim pozitivnim količnikom. Ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je $x_{ij}>0$, vektor A_i treba izbaciti iz baze.
Znači:

$$\frac{x_1}{x_{12}} = \frac{25}{-1.5} = -... \;(ne \;\; razmatra \;\; se) \qquad \frac{x_3}{x_{32}} = \frac{100}{2} = 50 \qquad \frac{x_6}{x_{62}} = \frac{15}{1.5} = 10$$

Za i=r=6 je ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_6 izlazi iz baze, tj. $\mathbf{B \rightarrow A_6}$.

Nova baza je $\mathbf{B=(A_1, A_2, A_3)}$.

Traži se inverzna matrica:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^T = B' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \;\; (kao \;\; prvi \;\; korak \;\; u \;\; trazenju \;\; invezne \;\; matrice)$$

Drugi korak kod nalaženja inverzne matrice je određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{12} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$B_{21} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \qquad B_{23} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \qquad B_{32} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \qquad B_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 0 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{12} + 1 \cdot B_{13} = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

inverzna matrica je:

$$B^{-1} = \frac{B^*}{|B|} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Pošto je:

$x_r=B^{-1}\,b$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 250 \\ 40 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 120 \\ 30 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$x_1=40$ $x_2=10$ $x_3=80$

Sada je **s=4,5,6:**

za s=4:

$$\begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x_{14}=0$ $x_{24}=2/3$ $x_{34}=-1/3$

za s=5:

$$\begin{bmatrix} x_{15} \\ x_{25} \\ x_{35} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x_{15}=0$ $x_{25}=-1/3$ $x_{35}=2/3$

za s=6:

$$\begin{bmatrix} x_{16} \\ x_{26} \\ x_{36} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$x_{16}=1$ $x_{26}=2/3$ $x_{36}=-4/3$

vrednosti funkcije kriterijuma za nađena rešenje su:

$$f = (0.2 \;\; 0.1 \;\; 0.3 \;\; -M \;\; -M \;\; -M) \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 33$$

Treba ispitati da li je ovo rešenje optimalno. Računaju se svi f_s:

Za s=4:

$$f_4 = (0.2 \; 0.1 \; 0.3 \; -M \; -M \; -M) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -0.03$$

Za s=5:

$$f_5 = (0.2 \; 0.1 \; 0.3 \; -M \; -M \; -M) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.17$$

Za s=6:

$$f_6 = (0.2\,0.1\,0.3 - M - M - M) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -0.13$$

Vrednost f-je kriterijuma za vektor b i ostale nebazične vektore je:
f=33 f_4=-0.1 f_5=0.5 f_6=-0.4

Simplex kriterijum zbog negativnih koeficijenata u f-ji kriterijuma za veštačke promenljive je **$\min_s (f_s - c_s) < 0$:**
f_4-c_4=M-0.1 f_5-c_5=M+0.5 f_6-c_6=M-0.4

Optimalno rešenje je:
x_1=40 x_2=10 x_3=80
sa max vrednošću f-je kriterijuma (max)f=33

PROBLEM MINIMUMA

Opšti problem minimuma je dat u obliku:

$$\begin{aligned} &(\min)W = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \ge b_1 \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \ge b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots a_{mn} x_n \ge b_m \\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

Problem se rešava tako što se sistem nejednačina prevodi u sistem jednačina uvođenjem dopunskih promenljivih. Dopunske promenljive su sa znakom - (minus), jer su ograničenja tipa **≥.** Koeficijenti uz dopunske promenljive u f-ji kriterijuma su 0 (nula).
Posle uvođenja dopunskih promenljivih, sistem ograničavajućih uslova postaje:

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n - x_{n+1} = b_1 \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n - \quad x_{n+2} = b_2 \qquad (1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n - \quad x_{n+m} = b_m \\ &x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m} \ge 0 \end{aligned}$$

Preko sistema (1) se ne može neposredno odrediti početno bazično moguće rešenje ako je $b_r > 0$ (za svako r=1,2,...m). Ako je $b_r < 0$ za svako r, tada se preko dopunskih promenljivih x_{n+r} dolazi neposredno do rešenja.

Znači, za slučaj $b_r > 0$ za svako r=1,2,...m do rešenja se dolazi uvođenjem veštačkih promenljivih x_{n+r0} (r=1,2,...m) sa koeficijentima +M u funkciji kriterijuma, gde je M relativno veliki konačan broj.

Nako uvođenja dopunskih i veštačkih promenljivih, problem linearnog programiranja postaje:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{(min)W=c_1\,x_1+c_2\,x_2+...+c_nx_n+0x_{n+1}+...+0x_{n+m}+M(x_{n+10}+x_{n+20}+...+x_{n+m0})}\\
&\mathbf{a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+...+a_{1n}\,x_n-x_{n+1}+x_{n+10}=b_1}\\
&\mathbf{a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+...+a_{2n}\,x_n-\quad x_{n+2}+x_{n+20}=b_2} \qquad \mathbf{(1)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathbf{a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+...+a_{mn}\,x_n-\quad x_{n+m}+x_{n+m0}=b_m}\\
&\mathbf{x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m},\,x_{n+10}+...+\,x_{n+m0}\geq 0}
\end{aligned}$$

U ovom sistemu se nalazi:

2m+n promenljivih, od kojih je **n** efektivnih, **m** dopunskih i **m** veštačkih .

Početno bazično moguše rešenje se određuje tako što se efektivne i dopunske promenljive izjednače sa 0 (nulom), pa ga čine veštačke promenljive. Dalji postupak je isti kao i kod problema maksimuma.

Kod kriterijuma za ulazak vektora u bazu, koji ovde glasi $\mathbf{max_s(c_s-f_s)<0}$ uzima se najveća negativna vrednost. Kriterijuma za izlazak iz baze je isti kao kod problema maximuma.Rešenje je optimalno za $c_s-f_s \geq 0$ za sve vrednosti s.

1. PRIMER

Rešiti dati problem minimum:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{(min)W=10\,x_1+15\,x_2}\\
&\mathbf{2\,x_1+x_2\geq 50}\\
&\mathbf{5\,x_1+3\,x_2\geq 80}\\
&\mathbf{x_1,x_2\ \geq 0}
\end{aligned}$$

Nakon uvođenja dopunskih promenljivih, system postaje:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{(min)W=10\,x_1+15\,x_2+0x_3+0x_4}\\
&\mathbf{2\,x_1+x_2-x_3\quad=50}\\
&\mathbf{5\,x_1+3\,x_2\quad-x_4=80}\\
&\mathbf{x_1,x_2,...x_4\ \geq 0}
\end{aligned}$$

Pošto se iz sistema ne može neposredno odrediti početno bazično rešenje, uvode se veštačke promenljive x_{30} i x_{40}, pa system postaje:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{(min)W=10\,x_1+15\,x_2+0x_3+0x_4+M(x_{30}+x_{40})}\\
&\mathbf{2\,x_1+x_2-x_3+x_{30}\quad=50}\\
&\mathbf{5\,x_1+3\,x_2\quad-x_4+x_{40}=80}\\
&\mathbf{x_1,x_2,...x_4,x_{30},x_{40}\ \geq 0}
\end{aligned}$$

U matričnom obliku:

$$(min)W=(10\quad 15\quad 0\quad 0\quad M\quad M)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{40} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \end{bmatrix}$$

A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 b

$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_{30},x_{40}) \geq 0$

Za određivanje početnog baznog rešenja stavlja se da je $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Početna baza je sastavljena od veštačkih promenljivih, tako se lako dolazi do početnog baznog rešenja za vektor b, kao i do rešenja za nebazične vektore A_1, A_2, A_3, A_4.

Početnu bazu čine vektori (A_5, A_6) r=5,6

$B\, x_r = b \,/\, B^{-1}$

$B\, B^{-1} x_r = B^{-1} b$

$x_r = B^{-1} b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$x_{30}=50$, $x_{40}=80$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$

Postupak za traženje optimalnog rešenja je dalje isti kao i kod problema maksimuma, bez obzira koji će vektor ući u bazu. Bitno je da u optimalnom rešenju ne bude veštačkih promenljivih x_{30} i x_{40}.

2. PRIMER

Odrediti početno bazično rešenje za dati problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} &(\max) f = 5x_1 + 6x_2 \\ &x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ &5x_1 + 2x_2 \leq 25 \\ &7x_1 + 4x_2 \geq 28 \\ &-x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nakon uvođenja dopunskih promenljivih, sistem izgleda:

$$\begin{aligned} &(\max) f = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 \\ &x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ &5x_1 + 2x_2 + x_4 = 25 \\ &7x_1 + 4x_2 - x_5 = 28 \\ &-x_1 + 2x_2 - x_6 = 2 \\ &x_1, x_2, \dots x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Pošto se iz sistema ne može neposredno odrediti početno bazično rešenje, jer dopunske promenljive ne određuju bazično moguće rešenje (jer kada je $x_1 = x_2 = 0$, $x_5=-28$ i $x_6=-2$), transformiše se treće i četvrto ograničenje uvođenjem veštačkih promenljivih x_{70} i x_{80}, pa je sistem:

$$\begin{aligned} &(\max) f = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 + M(x_{70} + x_{80}) \\ &x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \end{aligned}$$

$5x_1 + 2x_2 \quad +x_4 \qquad = 25$
$7x_1 + 4x_2 \qquad -x_5 + x_{70} \quad = 28$
$-x_1 + 2x_2 \qquad\qquad -x_6 + x_{80} = 2$
$x_1, x_2, \ldots x_8 \geq 0$

U matričnom obliku:

$$(\max)f=(5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -M \quad -M)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{80} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7\ A_8 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_{80} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 18 \\ 25 \\ 28 \\ 2 \end{bmatrix} \\ b \end{array}$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{70}, x_{80}) \geq 0$

Za određivanje početnog bazičnog rešenja stavlja se da je $x_1=x_2=x_5=x_6=0$. Početna baza je sastavljena od dopunskih i veštačkih promenljivih. Tako se lako dolazi do početnog bazičnog rešenja za vektor b, kao i do rešenja za nebazične vektore A_1, A_2, A_5, A_6.

Početnu bazu čine vektori (A_3, A_4, A_7, A_8) r=3,4,7,8

$B\, x_r = b \;/\; B^{-1}$
$B\, B^{-1}\, x_r = B^{-1}\, b$
$x_r = B^{-1}\, b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_{70} \\ x_{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 25 \\ 28 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x_3=18$, $x_4=25$, $x_{70}=28$, $x_{80}=2$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_5=0$, $x_6=0$

U optimalnoj bazi ne mogu stajati vektori A_7 i A_8 koji odgovaraju veštačkim promenljivim.

(Specijalni slučajevi)

PROBLEM DEGENERACIJE

Problem degeneracije nastaje kada su uslovi za promenu vektorske baze takvi da se ne može jednoznačno odrediti vektor koji treba eliminisati iz baze. Uslov za eliminisanje vektora iz baze je:

$$\theta = \min\left(\frac{x_r}{x_{rj}}\right), \qquad x_{rj} > 0$$

U slučaju da se jave dve ili više vrednosti za r sa istim minimalnim količnikom, nije lako opredeliti se za promenljivu koju treba eliminisati iz baze. To znači da se u narednoj iteraciji ne može vektor b izraziti kao linearna kombinacija bazičnih vektora sa pozitivnim množiteljima x_r, za svako r=1,2,...,m. U tom slučaju je $\theta = 0$ i vrednost f-je kriterijuma se ne može povećati, odnosno može doći do cikličnog ponavljanja sukcesivnih baza sa istom vrednošću f-je kriterijuma i do nemogućnosti određivanja optimalnog rešenja i max vrednosti f-je kriterijuma.

U praksi se problem degeneracije relativno lako otklanja različitim postupcima. U slučaju malog broja promenljivih, rešenje se relativno lako sagledava. Za veći broj promenljivih veoma je poznat Charnes-ov (perturbacioni) metod.

DUALNI PROBLEM

Osobina linearnog programiranja je da svakom problemu odgovara drugi, poznat pod nazivom dualni problem. U pogledu zahteva, postoji inverzija između primarnog i dualnog problema. Tako, ako je kriterijum u primaru izražen u vidu maximuma, u dualu je izražen u vidu minimuma. Isto tako, ako postoji optimalno rešenje primarnog problema, postoji i optimalno rešenje odgovarajućeg dualnog problema. Ova osobina je korisna za lakše rešavanje problema u slučaju da je jedan od problema (primar ili dual) jednostavniji. Tako se ponekad složeni problem prevodi u dual da bi se lakše rešio, a zatim se iz njegovog rešenja čita rešenje za primarni problem.

Duali problem je veoma značajan zbog uspostavljanja veze između linearnog programiranja i teorije igara.

Za dati problem linearnog programiranja:

$$
\begin{aligned}
&(\max)f=c_1\,x_1+c_2\,x_2+\ldots+c_n x_n\\
&a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\ldots+a_{1n}\,x_n\le b_1\\
&a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\ldots+a_{2n}\,x_n\le b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\ldots+a_{mn}\,x_n\le b_m\\
&x_1,\,x_2,\,\ldots\,x_n\ge 0
\end{aligned}
$$

dualni problem je:

$$
\begin{aligned}
&(\min)v=b_1\,y_1+b_2\,y_2+\ldots+b_m\,y_m\\
&a_{11}\,y_1+a_{21}\,y_2+\ldots+a_{m1}\,y_m\ge c_1\\
&a_{12}\,y_1+a_{22}\,y_2+\ldots+a_{m2}\,y_m\ge c_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{1n}\,y_1+a_{2n}\,y_2+\ldots+a_{mn}\,y_n\ge c_n\\
&y_1,\,y_2,\,\ldots\,y_m\ge 0
\end{aligned}
$$

gde su $y_1, y_2,\ldots y_m$ dualne promenljive, a **v** f-ja kriterijuma dualnog problema.

U matričnom obliku:

- primar:

$$
\begin{aligned}
&(\max)f=C\,x\\
&A\,x\le b\\
&x\ge 0
\end{aligned}
$$

- dual:

(min)v=b Y
A Y ≥ C
y ≥ 0

Dual se od primara dobija (tako što izvrši transponovanje vrsta i kolona ograničavajućih uslova primara) na sledeći način:

- u f-ji kriterijuma ako je zahtev bio dat u vidu maximuma, u dualu se daje u vidu min i obratno
- koeficijenti u f-ji kriterijuma postaju slobodni članovi ograničenja u dualu, a slobodni članovi ograničenja u primaru postaju koeficijenti f-je kriterijuma u dualu, samo što su sada transponovani, tj. vektor kolone b postaje vektor vrste, a vektor vrste C postaje vektor kolone u dualu
- ako su nejednačine u primaru tipa ≤ (za max) , u dualu su tipa ≥ (za min)

To znači da ako su ograničavajući uslovi primarnog problema dati sistemom od m nejednačina sa n promenljivih, onda su ograničavajući uslovi duala dati sistemom od n nejednačina sa m promenljivih.

Prema simplex kriterijumu, uslov za optimalno rešenje je:

$(c_s-f_s) < 0$ i $(f_s-c_s) > 0$ za nebazične promenljive

1. PRIMER

Primar:
$$(\max)f=5x_1+6x_2$$
$$x_1+3x_2 \le 18$$
$$5x_1+2x_2 \le 25$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Dual:
$$(\min)v=18y_1+25y_2$$
$$y_1+5y_2 \ge 5$$
$$3y_1+2y_2 \ge 6$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

2.PRIMER

Primar:
$$(\max)f=9x_1+10x_2$$
$$3x_1+2x_2 \le 240$$
$$2.5x_1+5x_2 \le 350$$
$$x_1 \le 65$$
$$x_2 \le 60$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Dual:
$$(\min)v=240y_1+350y_2+65y_3+60y_4$$
$$3y_1+2.5y_2+y_3 \ge 9$$
$$2y_1+5y_2+y_4 \ge 10$$
$$y_1,..,y_4 \ge 0$$

3.PRIMER

Primar:
$$(\max)f=4x_1+5x_2$$
$$4x_1+x_2 \le 44$$

$$x_1 + x_2 \le 14$$
$$-2x_1 + 3x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 30$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Dual: $(\min)v = 44y_1 + 14y_2 + 21y_3 + 30y_4$

$$4y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \ge 4$$
$$y_1 + y_2 + 3y_3 + 3y_4 \ge 5$$
$$y_1, .., y_4 \ge 0$$ (lakše se rešava dual)

Optimalno rešenje duala se može odrediti iz simplex kriterijuma primarnog problema za dopunske promenljive kao:

$y_s = -(c_{n+s} - f_{n+s}) = f_{n+s} - c_{n+s}$ gde je n-broj efektivnih promenljivih, a s=1,2,...m se odnosi na dopunske promenljive **ili** $y_s = -(c_s - f_s) = f_s - c_s$

Ako dopunska promenljiva figurira u optimalnoj bazi, prema teoremi 7, odgovarajuća dualna promenljiva jednaka je 0.

TEOREME DUALNOSTI

1. Dual dualnog problema daje primarni problem (svejedno je koji je od problema označen kao primar, a koji kao dual)
2. Za svako moguće rešenje x primarnog problema i odgovarajuće moguće rešenja y duala, vrednost f-je kriterijuma primarnog problema je manja ili najviše jednaka vrednosti f-je kriterijuma duala
3. Ako je x_0 moguće rešenje primarnog, a y_0 dualnog problema, tako da je C x_0 = b y_0, onda je x_0 optimalno rešenje primarnog, a y_0 optimalno rešenje dualnog problema
4. Ako primarni problem ima optimalno rešenje, tada i dual ima optimalno rešenje
5. Ako je k-to ograničenje primarnog problema dato u vidu jednačine, tada je odgovarajuća dualna promenljiva y_k neodređena u znaku
6. Ako je i-ta promenljiva primarnog problema neodređena u znaku, tada je i-to ograničenje duala dato u vidu jednačine
7. Ako se dopunska promenljiva x_{n+r} , koja odgovara r-tom ograničenju primarnog problema nalazi u optimalnoj bazi, odgovarajuća dualna promenljiva y_r u optimalnom rešenju duala jednaka je 0
8. Ako se efektivna promenljiva x_r primarnog problema nalazi u optimalnoj bazi, odgovarajuće r-to ograničenje duala dato je u vidu jednačine, odnosno odgovarajuća dopunska promenljiva duala y_{m+r} jednaka je 0

VRSTE DUALNIH PROBLEMA

Po formi, postoje dve vrste dualnih problema:
- simetrični
- nesimetrični

Simetrični problem je u slučaju da su u primarnom problemu sva ograničenja istog smera, tj.:

$$(\max) f = \sum_{s=1}^{n} C_s x_s$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s \le b_r \qquad r = 1,2,\ldots,n$$

$$x_s \ge 0, \qquad s = 1,2,\ldots,n$$

$$(\min) v = \sum_{r=1}^{m} y_r b_r$$

$$\sum_{r=1}^{m} y_r a_{rs} \ge C_s \qquad s = 1,2,\ldots,n$$

$$y_r \ge 0, \qquad r = 1,2,\ldots,m$$

Nesimetrični dualni problem nastaje u slučaju kada sva ograničenja u primaru nisu istog smera, tj.:

$$(\max) f = \sum_{s=1}^{n} C_s x_s$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s \le b_r \qquad r = 1,2,\ldots,i \qquad i < m$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s = b_r \qquad r = i+1, i+2$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s \ge b_r \qquad r = i+3,\ldots,m$$

$$x_s \ge 0, \qquad s = 1,2,\ldots,n$$

Za ovaj problem dual je nesimetričan, pa promenljiva može biti i negativna, tj. ne postavlja se onaj opšti oblik da promenljive duala moraju biti nenegativne.

Dual za ovaj slučaj je:

$$((\min) v = \sum_{i=1}^{m} y_r b_r$$

$$\sum_{r=1}^{m} y_r a_{rs} \ge C_s \qquad s = 1,2,\ldots,n$$

$$y_r \ge 0, \qquad r = 1,2,\ldots,i \qquad i < m$$

Ili ako je primar:

$$(\max) f = \sum_{sj=1}^{n} C_s x_s$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s = b_r \qquad r = 1,2,\ldots,m$$

$$x_s \ge 0, \qquad s = 1,2,\ldots,n$$

dual je:

$$(\min)v=\sum_{i=1}^{m}y_r b_r$$

dakle, nema opšteg ograničenja.

$$\sum_{r=1}^{m}y_r a_{rs}\ge b_r \qquad r=1,2,\ldots,m$$

1. PRIMER

Dat je primarni problem: **(max)f=40x$_1$ +30 x$_2$**

$$x_1+2x_2\le 100$$
$$5x_1+3x_2\le 500$$
$$x_1\le 70$$
$$x_1,\ x_2\ge 0$$

Posle uvođenja dopunskih promenljivih:

$$(\max)f=40x_1+30x_2+0x_3+0x4+0x5$$
$$x_1+2x_2+x_3=100$$
$$5x_1+3x_2\quad +x_4=500$$
$$x_1\qquad\qquad +x_5=70$$
$$x_1,\ ..,x_5\ge 0$$

ili u matričnom obliku:

$$(\max)f=(40\ 30\ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&1&0&0\\5&3&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\500\\70\end{bmatrix}$$

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\ge 0$$

Vektor b je vektor trećeg reda i ukupan broj promenljivih je 5. Za dobijanje početnog bazično mogućeg rešenja, formira se baza sastavljena od 3 vektora. Najlakše je ako se za početno rešenje uzme da bazu čine vektori uz dopunske promenljive, tj. ako je $x_1= x_2=0$ i bazu čine jedinični vektori koji odgovaraju dopunskim promenljivim x_3, x_4, x_5.

Početnu bazu čine vektori (A_3, A_4, A_5) r=3,4,5

$B\ x_r=b\ /\ B^{-1}$

$B\ B^{-1}\ x_r=B^{-1}\ b$

$x_r=B^{-1}\ b$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\500\\70\end{bmatrix}$$

$x_5 = 70$, $x_4=500$, $x_3=100$, $x_1=0$, $x_2=0$

Vektori van baze, a to su A_1, A_2 mogu se napisati kao linearna kombinacija baznih vektora, tj. ako sa **s** označimo vektore van baze, onda je: $\sum_{r=1}^{m} x_{rs} A_r = A_s$ (s=m+1, m+2,...,n), a odavde $x_{rs}=B^{-1}A_s$.

Ovde je **s=1,2.**

Za s=1 je:

$$\begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{41} \\ x_{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_{31}=1, \quad x_{41}=5, \quad x_{51}=1$$

Za s=2 je:

$$\begin{bmatrix} x_{32} \\ x_{42} \\ x_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_{32}=2, \quad x_{42}=3, \quad x_{52}=0$$

Vrednost funkcije kriterijuma za ovo rešenje je:

$$f=(C_1 \ \ C_2 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_5 \end{bmatrix} = (40 \ \ 30 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 500 \\ 70 \end{bmatrix} = 0$$

Znači vrednost funkcije kriterijuma za ovo bazično moguće rešenje je 0.

Treba ispitati da li je ovo rešenje optimalno, tj. pod brojem 3. <u>Ako je</u> $C_s - f_s \le 0$ <u>za sve nebazične vektore (s), rešenje je optimalno</u>. Računaju se svi f_s:

Za s=1:

$$f_1 = (0 \ \ 0 \ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Za s=2:

$$f_2 = (0 \ \ 0 \ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Traži se $C_s - f_s$ za **s=1,2:**

$C_1-f_1=40-0=40$

$C_2-f_2=30-0=30$

Vidi se da uslov optimalnosti $C_s-f_s \le 0$ nije zadovoljen, pa rešenje nije optimalno

Sada se vrši promena baze na osnovu 1. kriterijuma, koji glasi: <u>Ako je</u> $C_s-f_s>0$ <u>za jedan ili više nebazičnih vektora, tada se u bazu uključuje onaj vektor A_s sa najmanje jednim</u> $x_{rs}>0$ <u>za koje je</u>

$C_j-f_j=\max (C_s-f_s)$

Za s=j=1 je ova razlika max. To znači da $\mathbf{A_1 \rightarrow B}$ (ulazi u bazu).

Koji vektor se izbacuje iz baze?

$$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min(\frac{x_r}{x_{rj}}), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim pozitivnim količnikom. Znači, ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je $x_{ij}>0$, vektor A_i treba izbaciti iz baze.
Znači:

$$\frac{x_3}{x_{31}} = \frac{100}{1} = 100 \qquad \frac{x_4}{x_{41}} = \frac{500}{5} = 100 \qquad \frac{x_5}{x_{51}} = \frac{70}{1} = 70$$

Za i=r=5 ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_5 izlazi iz baze, tj. $\mathbf{B \to A_5}$.

Promena u bazi se simbolički predstavlja kao $\mathbf{A_1 \to B \to A_5}$

Novu bazu čine vektori B=(A_1, A_3, A_4) r=1,3,4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sada se traži inverzna matrica:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^T = B' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{transponovana} \quad \textit{matrica (kao prvi korak)}$$

Drugi korak kod nalaženja inverzne matrice je određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$B_{21} = -\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{23} = -\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{32} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad B_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -5$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 1 \cdot B_{11} + 5 \cdot B_{12} + 1 \cdot B_{13} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

(iz transponovane)
inverzna matrica je:

$$B^{-1} = \frac{B^*}{|B|} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Pošto je:

$x_r = B^{-1}\, b$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 30 \\ 150 \end{bmatrix} \quad x_1=70 \; x_3=30 \; x_4=150$$

Sada je s=2,5:

za s=2:

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_{12}=0$ $x_{32}=2$ $x_{42}=3$

za s=5:

$$\begin{bmatrix} x_{15} \\ x_{35} \\ x_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$x_{15}=1$ $x_{35}=-1$ $x_{45}=-5$

$$f=(C_1 \;\; C_2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_5 \end{bmatrix} = (40 \;\; 30 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{bmatrix} 70 \\ 0 \\ 30 \\ 150 \\ 0 \end{bmatrix} = 280$$

Treba ispitati da li je ovo rešenje optimalno, tj. pod brojem 3. Ako je C_s-$f_s \leq 0$ za sve nebazične vektore (s), rešenje je optimalno. Računaju se svi f_s:

za s=2: $$f_2 = (40 \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

za s=5: $$f_5 = (40 \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = 40$$

Traži se C_s-f_s za s=2,5:

C_2-f_2=30-0=30

C_5-f_5=0-40=-40

Uslov optimalnosti nije C_s-$f_s \leq 0$ zadovoljen.

Sada se vrši promena baze na osnovu 1. kriterijuma, koji glasi: Ako je C_s-f_s>0 za jedan ili više nebazičnih vektora, tada se u bazu uključuje onaj vektor A_s sa najmanje jednim x_{rs}>0 za koje je C_j-f_j=max (C_s-f_s)

Za s=j=2 je ova razlika max. To znači da $\mathbf{A_2} \rightarrow \mathbf{B}$ (ulazi u bazu).

Koji vektor se izbacuje iz baze? $$\frac{x_i}{x_{ij}} = \min(\frac{x_r}{x_{rj}}), \qquad x_{rj} > 0$$

Iz baze se izbacuje vektor sa minimalnim pozitivnim količnikom. Znači, ako je za r=i količnik odgovarajućih rešenja minimalan, pri čemu je x_{ij}>0, vektor A_i treba izbaciti iz baze.

Znači:

$$\frac{x_1}{x_{12}} = \frac{70}{0} = \infty \qquad \frac{x_3}{x_{32}} = \frac{30}{2} = 15 \qquad \frac{x_4}{x_{42}} = \frac{150}{3} = 50$$

Za i=r=3 ostvaren je minimalni količnik. To znači da vektor A_3 izlazi iz baze, tj. $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A_3}$.

Promena u bazi se simbolički predstavlja kao $\mathbf{A_2} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A_3}$

Novu bazu čine vektori B=(A_1, A_2, A_4) r=1,2,4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Traži se inverzna matrica:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^T = B' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{transponovana matrica (kao prvi korak)}$$

Drugi korak kod nalaženja inverzne matrice je određivanje koeficijenata transponovane matrice, na sledeći način:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{12} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$B_{21} = -\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_{13} = -\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -3 \qquad B_{32} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \qquad B_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -7$$

adjungovana matrica i determinanta (određena iz B^T) su:

$$adjB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 1 \cdot B_{11} + 5 \cdot B_{12} + 1 \cdot B_{13} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

(iz transponovane)

inverzna matrica je:

$$B^{-1} = \frac{B^*}{|B|} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ -1.5 & 1 & -3.5 \end{bmatrix}$$

Pošto je: $x_r = B^{-1} b$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ -1.5 & 1 & -3.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 15 \\ 105 \end{bmatrix}$$

$x_1=70$ $x_2=15$ $x_4=105$

Sada je s=3,5:

za s=3:

$$\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ -1.5 & 1 & -3.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$x_{13}=0$ $x_{23}=0.5$ $x_{43}=-1.5$

za s=5:

$$\begin{bmatrix} x_{15} \\ x_{25} \\ x_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ -1.5 & 1 & -3.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -3.5 \end{bmatrix} \qquad x_{15}=1 \qquad x_{25}=-0.5 \qquad x_{45}=-3.5$$

$$f=(C_1 \ \ C_2 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_5 \end{bmatrix} = (40 \ \ 30 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 70 \\ 15 \\ 0 \\ 105 \\ 0 \end{bmatrix} = 3250$$

Treba ispitati da li je ovo rešenje optimalno, tj. pod brojem 3. <u>Ako je</u> C_s-$f_s \le 0$ <u>za sve nebazične vektore (s), rešenje je optimalno</u>. Računaju se svi f_s:

za s=3: $$f_3 = (40 \ \ 30 \ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} = 15$$

za s=5: $$f_5 = (40 \ \ 30 \ \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -3.5 \end{bmatrix} = 25$$

Traži se C_s-f_s za s=4,5:

C_3-f_3=0-15=-15

C_5-f_5=0-25=-25

Vidi se da je uslov optimalnosti je C_s-$f_s \le 0$ zadovoljen.

Dual je:

(min)v=100 y_1+500 y_2+70 y_3

y_1 +5 y_2+$y_3 \ge 40$

2 y_1 +3 $y_2 \ge 30$

$y_1,...,y_3 \ge 0$

Optimalno rešenje duala dobijamo iz simplex kriterijuma primarnog problema:

y_s=-(c_s-f_s) = f_s-c_s gde se s=1,2,...m

pa je:

y_1=-(c_3-f_3)=-(-15)=15

y_2=0

y_3=-(c_5-f_5)=-(-25)=25

Dulna promenljiva y_2=0 zato što je dopunska promenljiva $x_4 \neq 0$ ostala u optimalnoj bazi (teorema 7). Optimalno rešenje duala je: y1=15, y_2=0, y_3=25

Vrednost f-je kriterijuma duala je:

(min)v=100x15+500x0+70x25=3250