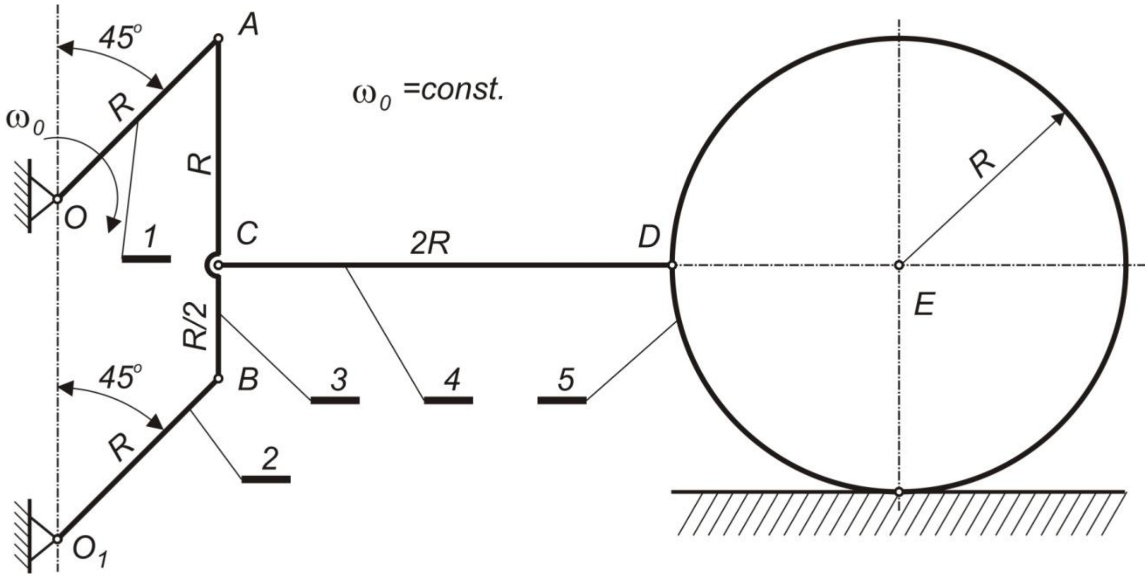
Zadatak 15. ISPITNI

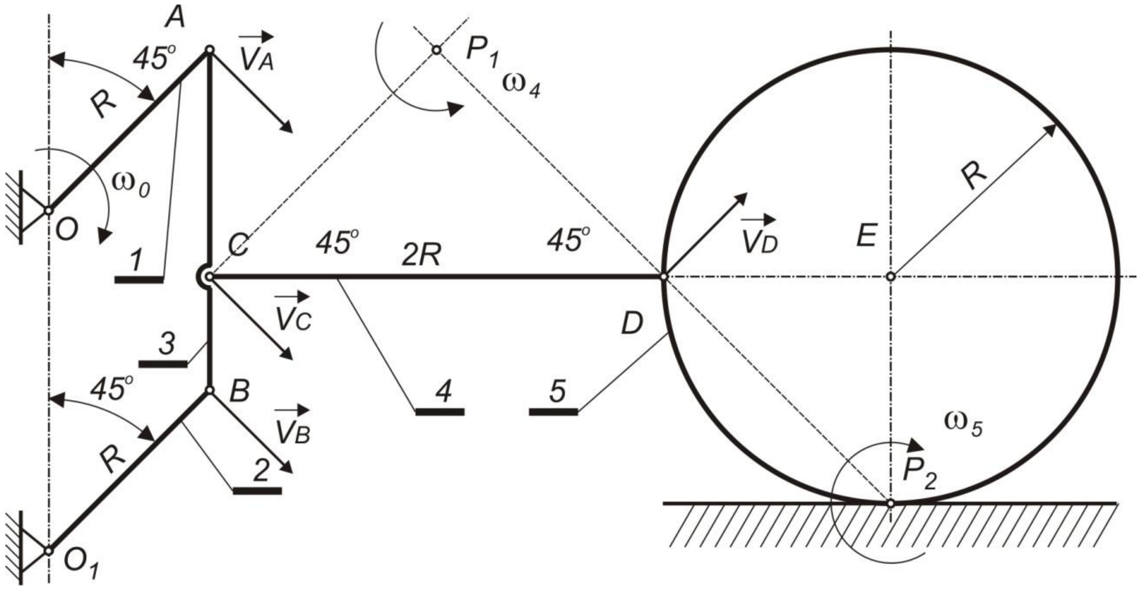
Mehanizam se sastoji od poluge 1, dužine R, koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko centra O, zatim poluge 2 dužine R, poluge 3 dužine 1,5R, poluge 4 dužine 2R i diska 5 poluprečnika R koji se kortlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi. U tačkama A, B,C, D, 0 i 0_1 su zglobne veze. Mehanizam se kreće u ravni.
Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska u prikazanom položaju.



Rešenje:

Kako se poluga okreće ugaonom brzinom ω_0, brzina tačke A poluge 1

$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega_0 = R \ \cdot \omega_0$$



Tačka A je i tačka poluge AB označene sa 3. Tačka B poluge 3 je zglob koji pripada poluzi 2, i mora da se okreće oko O_1. Kako su poluge 1 i 2 iste dužine a ose okretanja su vertikalno jedna ispod druge poluga 3 vrši translatorno kretanje pa su brzine svih tačaka jednake.

$$V_A = V_B = V_C = R \cdot \omega_0$$

Brzina zgloba D diska 5 mora biti upravna na pravac kroz D i kroz tačku dodira diska sa podlogom, koja je i trenutni pol brzina za disk 5 P_2. U preseku normale na brzinu V_C u tački C i normale na V_D u tački D dobija se trenutni pol brzina P_1 za polugu CD označenu sa 4.

Na osnovu prikazane konfiguracije vidi se da je trougao CP_1D pravougli jednakokraki trougao sa uglovima $45^o 90^o 45^o$ pa su

$$\overline{CP_1} = \overline{CP_1} = \sqrt{2}R$$

Brzina tačke C poluge 3 je ista sa brzinom tačke C poluge 4

$$V_C = \overline{CP_1} \cdot \omega_4 = R\sqrt{2} \cdot \omega_4 = R \cdot \omega_0$$

$$\omega_4 = \frac{V_C}{R\sqrt{2}} = \frac{R}{R\sqrt{2}} \cdot \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0 \qquad \omega_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0$$

Brzina tačke D poluge je

$$V_D = \overline{DP_1} \cdot \omega_4 = \sqrt{2}R \cdot \omega_4 = \sqrt{2}R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0 = R \cdot \omega_0$$

Brzina tačke D poluge je ista sa brzinom tačke D diska

$$V_D = \overline{DP_2} \cdot \omega_5 = \sqrt{2}R_2 \cdot \omega_5$$

Ugaona brzina diska koji se kotrlja po horizontalnoj podlozi ω_5 je

$$\omega_5 = \frac{V_D}{\sqrt{2}R} = \frac{R \cdot \omega_0}{\sqrt{2}R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0 \qquad \boxed{\omega_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0}$$

Brzina tačke E

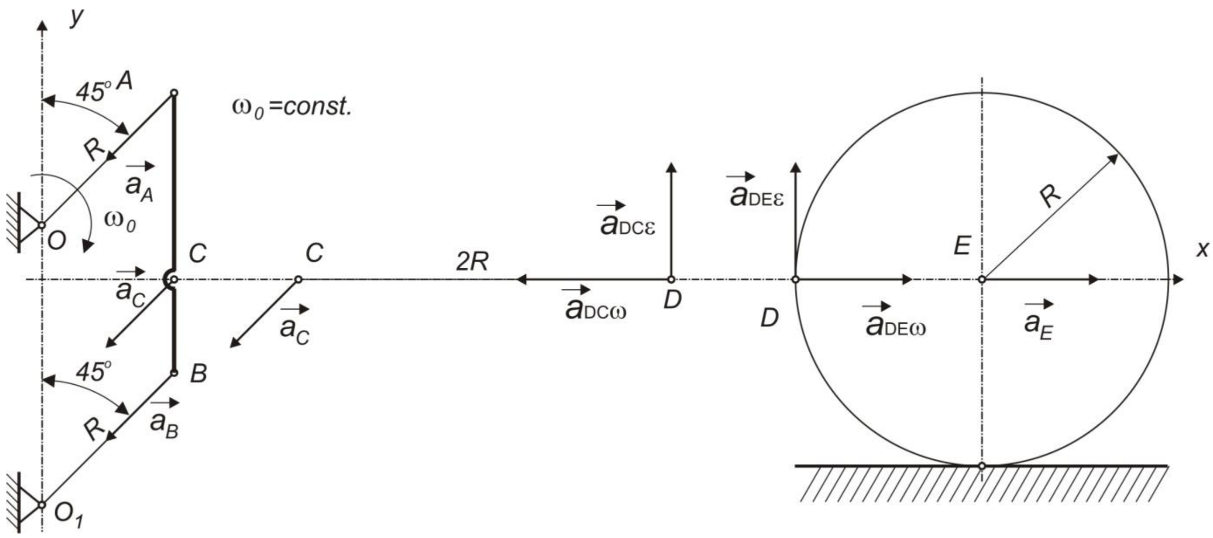
$$V_E = R \cdot \omega_5 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0$$

Ugaono ubrzanje tačke A diska 1 je samo ubrzanje usled ugaone brzine jer je ugaona brzina poluge 1 konstantna

$$\overrightarrow{a_A} = a_{A\varepsilon}\vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = 0 \cdot \vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = R \cdot \omega_1^2 \vec{N}$$

$$\overrightarrow{a_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_{A\omega}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_{A\omega}\vec{\jmath} = -\frac{\sqrt{2}}{2} R\omega_0^2\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2} R\omega_0^2\vec{\jmath}$$

Ugaono ubrzanje tačke A poluge 3 jednako je ubrzanju tačke C poluge 3 jer se poluga kreće translatorno



$$\overrightarrow{a_C} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{C\omega}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}a_{C\omega}\vec{\jmath} = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2\vec{\jmath}$$

Ubrzanje tačke D kao elementa poluge 4 jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC\varepsilon} + \vec{a}_{DC\omega}$$

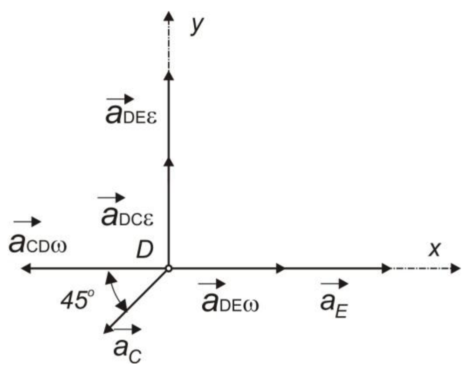
$$a_{DC\varepsilon} = 2R \cdot \varepsilon_4$$

$$a_{DC\omega} = 2R \cdot (\omega_4)^2 = 2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0\right)^2 = R \cdot {\omega_0}^2$$

Ubrzanje tačke D sa druge strane kao elementa diska 5 jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{DE\varepsilon} + \vec{a}_{DE\omega}$$

Ubrzanje tačke E mora biti horizontalno jer je kretanje centra diska pravolinijsko i paralelno podlozi



$$\vec{a}_E = a_E\,\vec{\imath} = R \cdot \varepsilon_5\,\vec{\imath}$$

$$\vec{a}_{DE\varepsilon} = R \cdot \varepsilon_5\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{a}_{DE\omega} = R \cdot (\omega_5)^2\vec{\imath} = R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0\right)^2\vec{\imath} = \frac{1}{2}R{\omega_0}^2\vec{\imath}$$

Kada se izjednače dva vektorska izraza za ubrzanje tačke D dobija se

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC\varepsilon} + \vec{a}_{DC\omega}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{DE\varepsilon} + \vec{a}_{DE\omega}$$

i projektuje na x i y osu dobija se

x: $-\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2 + 0 - R\omega_0^2 = R \cdot \varepsilon_5 - 0 + \frac{1}{2}R{\omega_0}^2$

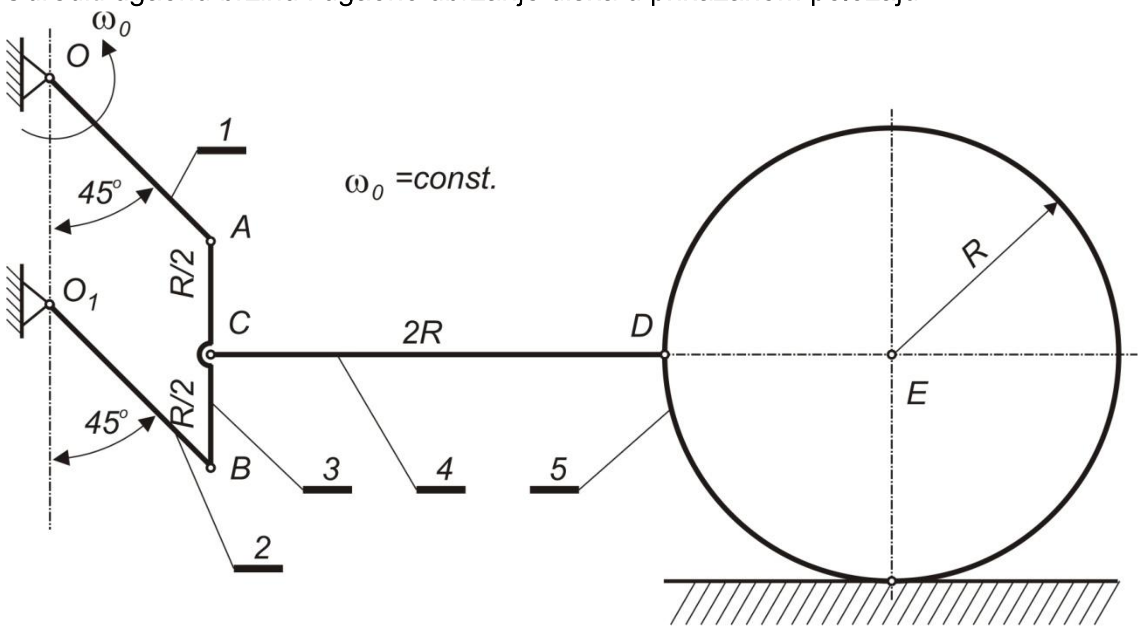
y: $-\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2 + 2R\varepsilon_4 + 0 = 0 + R \cdot \varepsilon_5 + 0$

$$\boxed{\varepsilon_5 = -\frac{3+\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0^2}$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{3+\sqrt{2}}{4} \cdot \omega_0^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\omega_0^2 = -\frac{3}{4}\omega_0^2$$

Zadatak 16. ISPITNI

Mehanizam se sastoji od poluge 1, dužine R, koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko centra O, zatim poluge 2 dužine R, poluge 3 dužine R, poluge 4 dužine 2R i diska 5 poluprečnika R koji se kortlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi. U tačkama A, B,C, D, 0 i 0_1 su zglobne veze. Mehanizam se kreće u ravni.
Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska u prikazanom položaju.



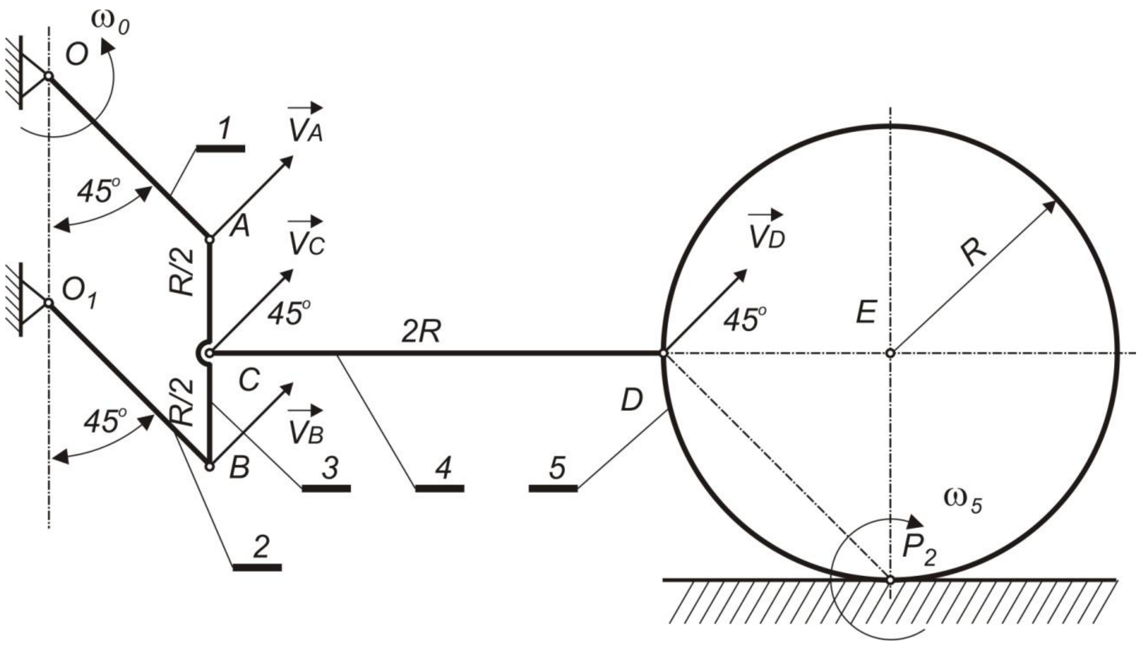
Rešenje:

Kako se poluga okreće ugaonom brzinom ω_0, brzina tačke A poluge 1

$$V_A = R \cdot \omega_0$$

Tačka A je i tačka poluge AB označene sa 3. Tačka B poluge 3 je zglob koji pripada poluzi 2, i mora da se okreće oko O_1. Kako su poluge 1 i 2 iste dužine a ose okretanja su vertikalno jedna ispod druge poluga 3 vrši translatorno kretanje pa su brzine svih tačaka jednake.

$$V_A = V_B = V_C = R \cdot \omega_0$$



Brzina tačke D poluge je ista sa brzinom tačke D diska i paralelna je sa pravcem brzine tačke C poluge 4 pa su projekcije brzina na pravac CD i na normalan pravac

$$V_C cos45° = V_D cos45° \rightarrow V_C = V_D = R\omega_0$$

$$V_C sin45° + V_{DC} = V_D sin45° \rightarrow V_{DC} = 2R\omega_4 = 0$$

Pol brzina je u beskonačnopsti i poluga 4 izvodi translaciju

$$V_D = \overline{DP_2} \cdot \omega_5 = \sqrt{2}R_2 \cdot \omega_5$$

Ugaona brzina diska koji se kotrlja po horizontalnoj podlozi ω_5 *je*

$$\omega_5 = \frac{V_D}{\sqrt{2}R} = \frac{R\cdot\omega_0}{\sqrt{2}R} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\omega_0$$

$$\boxed{\omega_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\omega_0}$$

Brzina tačke E

$$V_E = R\cdot\omega_5 = \frac{R\sqrt{2}}{2}\cdot\omega_0$$

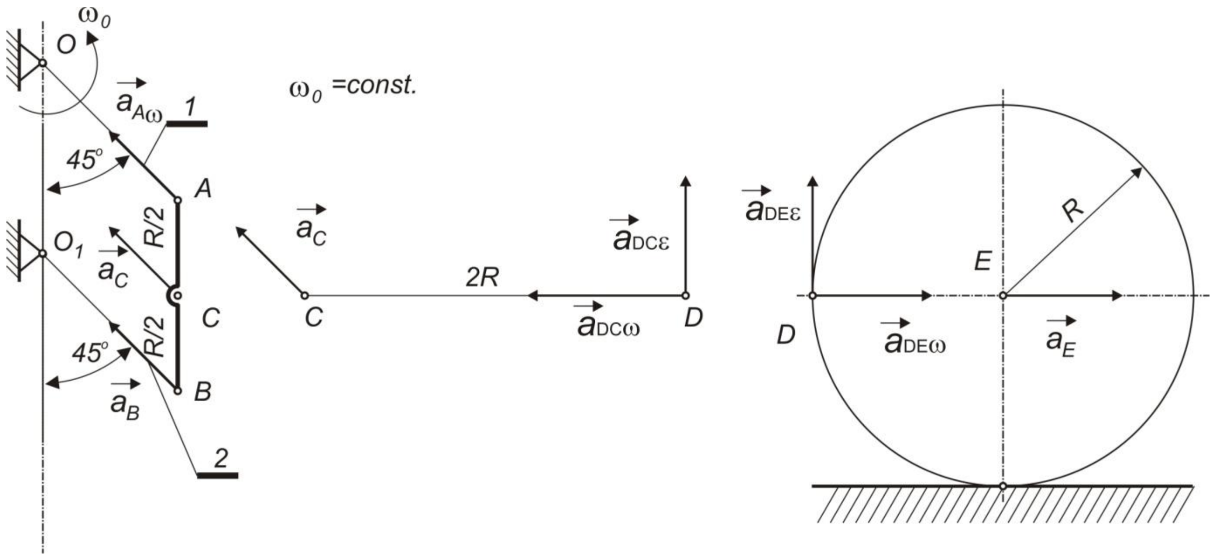
Ugaono ubrzanje tačke A je samo ubrzanje usled ugaone brzine jer je ugaona brzina poluge 1 konstantna

$$\overrightarrow{a_A} = a_{A\varepsilon}\vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = 0\cdot\vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = R\cdot\omega_1^2\vec{N}$$

$$\overrightarrow{a_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{A\omega}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}a_{A\omega}\vec{\jmath} = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2\vec{\jmath}$$

Ugaono ubrzanje tačke A poluge 3 jednako je ubrzanju tačke C poluge 3 jer se poluga kreće translatorno

$$\overrightarrow{a_C} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_{C\omega} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_{C\omega} \vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} R\omega_0^2 \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} R\omega_0^2 \vec{j}$$



Ubrzanje tačke D kao elementa poluge 4 jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC\varepsilon} + \vec{a}_{DC\omega}$$

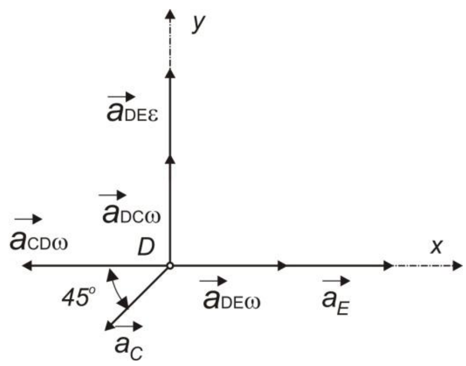
$$a_{DC\varepsilon} = 2R \cdot \varepsilon_4$$

$$a_{DC\omega} = 0$$

Ubrzanje tačke D sa druge strane kao elementa diska 5 jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{DE\varepsilon} + \vec{a}_{DE\omega}$$

Ubrzanje tačke E mora biti horizontalno jer je kretanje centra diska pravolinijsko i paralelno podlozi



$$\vec{a}_E = a_C\, \vec{i} = R \cdot \varepsilon_5\, \vec{i}$$

$$\vec{a}_{DE\varepsilon} = R \cdot \varepsilon_5\, \vec{j}$$

$$\vec{a}_{DE\omega} = R \cdot (\omega_5)^2 \vec{i} = R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0\right)^2 \vec{i} = \frac{1}{2} R {\omega_0}^2 \vec{i}$$

Kada se izjednače dva vektorska izraza za ubrzanje tačke D dobija se

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC\varepsilon} + \vec{a}_{DC\omega}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{DE\varepsilon} + \vec{a}_{DE\omega}$$

i projektuje na x i y osu dobija se

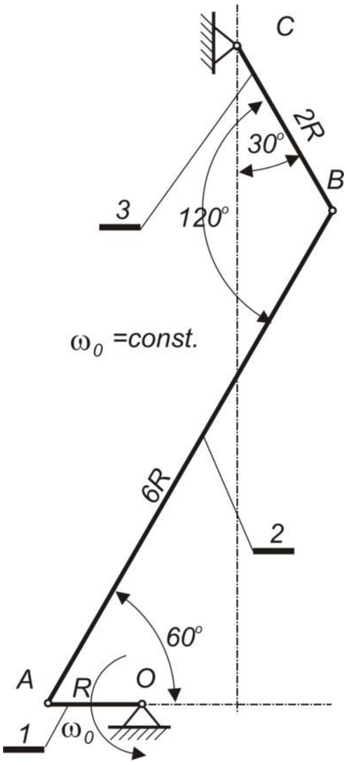
x: $-\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2 + 0 + 0 = R \cdot \varepsilon_5 + 0 + \frac{1}{2}R{\omega_0}^2$

y: $\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_0^2 + 2R\varepsilon_4 + 0 = 0 + R \cdot \varepsilon_5 + 0$

$$\boxed{\varepsilon_5 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_0^2}$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1+\sqrt{2}}{4} \cdot \omega_0^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\omega_0^2 = -\frac{1}{4}\omega_0^2$$

Zadatak 17. ISPITNI



Mehanizam se sastoji od poluge 1, dužine R, koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko centra O, zatim poluge 2 dužine 6R i poluge 3 dužine 2R. U tačkama A, B, C, 0 su zglobne veze. Mehanizam se kreće u ravni oko nepokretnih osa kroz tačke O i C upravnih na ravan mehanizma.

Odrediti brzinu i ubrzanje zgloba B, kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje poluge 3.

Rešenje:

Kako se poluga okreće ugaonom brzinom ω_0, brzina tačke A poluge 1

$$V_A = R \cdot \omega_0$$

Tačka A je i tačka poluge AB označene sa 2. Tačka B poluge 3 je zglob koji pripada poluzi 2, i mora da se okreće oko C. Trenutni pol brzina nalazi se u pravcu normala na brzine V_A i V_B u tačkama A i B.

Kako je uočeni trougao ABP_V jednakostranični trougao stranice 6R, to je rastojanje tačaka od pola po 6R.

$$V_A = V_B = 6R \cdot \omega_2 = R \cdot \omega_0 \rightarrow \qquad \omega_2 = \frac{V_A}{6R} = \frac{R \cdot \omega_0}{6R} = \frac{1}{6} \cdot \omega_0$$

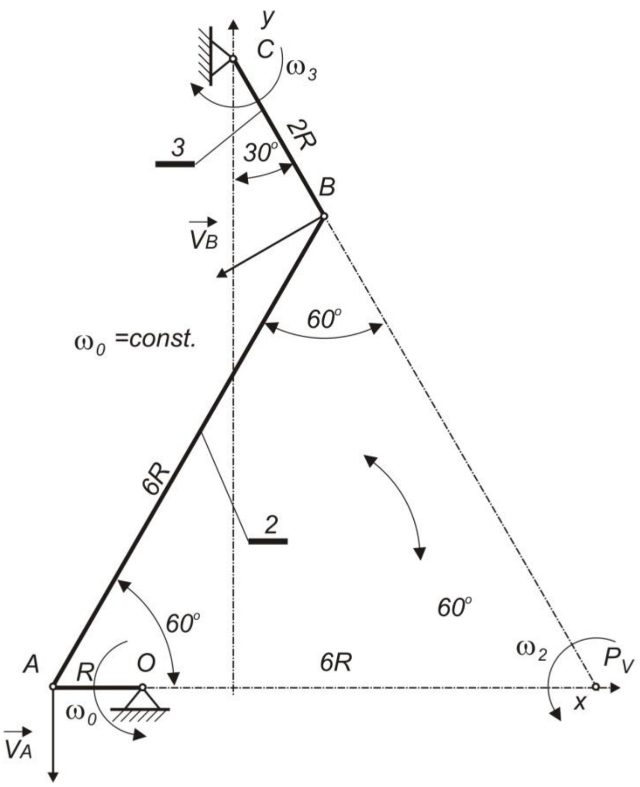
Poluga 3 okreće oko tačke C

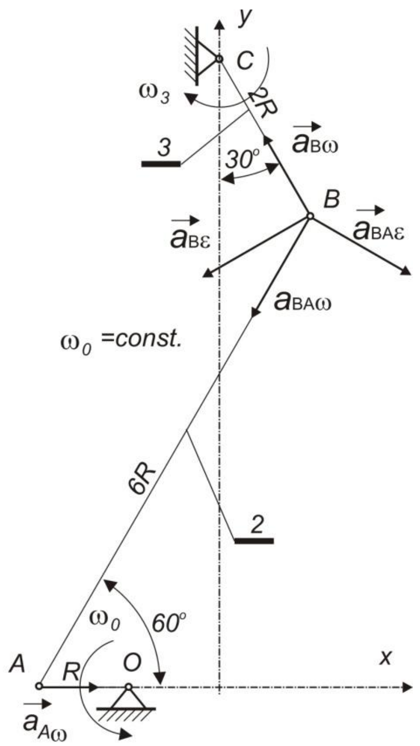
$$V_B = 6R \cdot \omega_2 = 2R \cdot \omega_3 \rightarrow \qquad \boxed{\omega_3 = \frac{V_B}{2R} = \frac{R \cdot \omega_0}{2R} = \frac{1}{2} \cdot \omega_0}$$

Ugaono ubrzanje tačke A je samo ubrzanje usled ugaone brzine jer je ugaona brzina poluge 1 konstantna

$$\overrightarrow{a_A} = a_{A\varepsilon}\vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = 0 \cdot \vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = R \cdot \omega_0^2\vec{N}$$

$$\overrightarrow{a_A} = a_{A\omega}\vec{\imath} = R\omega_0^2\vec{\imath}$$



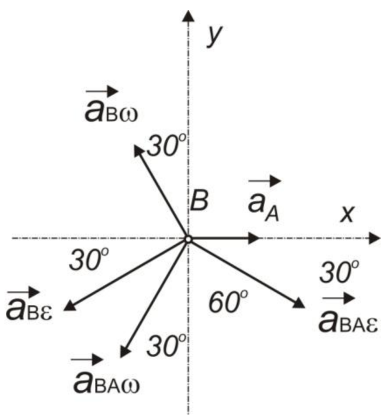


Ubrzanje tačke B kao elementa poluge 2 jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$a_{BA\varepsilon} = 6R\varepsilon_2$$

$$a_{BA\omega} = 6R(\omega_2)^2 = 6R\left(\frac{\omega_0}{6}\right)^2 = R\frac{{\omega_0}^2}{6}$$



Ubrzanje tačke B sa druge strane kao elementa poluge 3 koja rotira oko C

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B\varepsilon} + \vec{a}_{B\omega}$$

$$a_{B\varepsilon} = 2R\varepsilon_3$$

$$a_{B\omega} = 2R(\omega_3)^2 = R\frac{{\omega_0}^2}{2}$$

Iz dve vektorske jednačine kada se izjednači ubrzanje tačke B i projektuje na x i y osu dobija se

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B\varepsilon} + \vec{a}_{B\omega}$$

x: $a_A + a_{BA\varepsilon}\cos 30° - a_{BA\omega}\sin 30° = -a_{B\varepsilon}\cos 30° - a_{B\omega}\sin 30°$

y: $0 - a_{BA\varepsilon}\sin 30° - a_{BA\omega}\cos 30° = -a_{B\varepsilon}\sin 30° + a_{B\omega}\cos 30°$

x: $R\omega_0^2 + 6R\varepsilon_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - R\frac{{\omega_0}^2}{6}\frac{1}{2} = -2R\varepsilon_3 \ \frac{\sqrt{3}}{2} - R\frac{{\omega_0}^2}{2}\frac{1}{2}$

y: $0 - 6R\varepsilon_2 \frac{1}{2} - R\frac{{\omega_0}^2}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} = -2R\varepsilon_3 \ \frac{1}{2} + R\frac{{\omega_0}^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$

x: $R\omega_0^2 + 3\sqrt{3}R\varepsilon_2 - R\frac{{\omega_0}^2}{12} = -R\sqrt{3}\varepsilon_3 \ - R\frac{{\omega_0}^2}{4}$

y: $0 - 3R\varepsilon_2 - R\frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{12} = -R\varepsilon_3 + R\frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{4} \rightarrow$

$\varepsilon_2 = -\frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{36} + \frac{\varepsilon_3}{3} - \frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{12} = \frac{\varepsilon_3}{3} - \frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{9}$

$\varepsilon_3 = -3\varepsilon_2 - \frac{14\sqrt{3}{\omega_0}^2}{36} = -\varepsilon_3 - \frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{3} - \frac{14\sqrt{3}{\omega_0}^2}{36}$

$2\varepsilon_3 = \frac{-\sqrt{3}{\omega_0}^2}{18} \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_3 = \frac{-\sqrt{3}{\omega_0}^2}{36}}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_{B\varepsilon} + \vec{a}_{B\omega}$

$\vec{a}_B = \left(-R\sqrt{3}\varepsilon_3 \ - R\frac{{\omega_0}^2}{4}\right)\vec{\imath} + \left(-2R\varepsilon_3 \ \frac{1}{2} + R\frac{{\omega_0}^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{\jmath}$

$\vec{a}_B = \left(R\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{2} \ - R\frac{{\omega_0}^2}{4}\right)\vec{\imath} + \left(2R\frac{\sqrt{3}{\omega_0}^2}{36} \ \frac{1}{2} + R\frac{{\omega_0}^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{\jmath}$

$\boxed{\vec{a}_B = \frac{5}{4}R{\omega_0}^2\vec{\imath} - \frac{5\sqrt{3}}{18}R{\omega_0}^2\vec{\jmath}}$