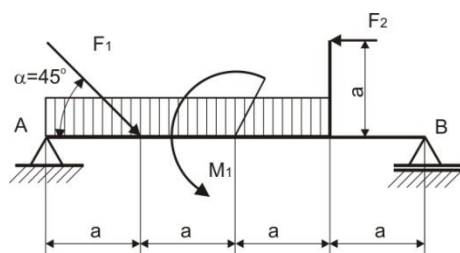
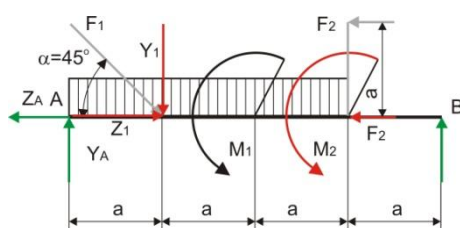


Primer 3.5

Za prostu gredu prikazanu na slici odrediti otpore oslonaca i nacrtati osnovne statičke dijagrame. Poznata su opterećenja $F_1 = 2\sqrt{2}$ kN, $F_2 = 1$ kN, $M_1 = 2$ kNm, $q = 0.8 \frac{kN}{m}$, $a=1$ m a ugao $\alpha=45^\circ$.

Da bi se rešila data greda treba paralelno premestiti silu F_2 na pravac grede što uslovljava dodavanje momenta u tački u koju se sila premešta a jednakog proizvodu normalnog rastojanja i sile. U osloncima se zamenjuje njihovo dejstvo reakcijama oslonaca, kod tačke nepokretnog oslonca A kosa sila u ravni odnosno dve komponente i u tački pokretnog oslonca B vertikalna sila.



$$Z_1 = F_1 \cos \alpha = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \text{ kN}$$

$$Y_1 = F_1 \sin \alpha = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \text{ kN}$$

$$M_2 = F_2 \cdot a = 1 \cdot 1 = 1 \text{ kNm}$$

$$F_q = q \cdot 3a = 0.8 \cdot 3 = 2.4 \text{ kN}$$

$$1. \quad \sum Z_i = -Z_A + Z_1 - F_2 = 0$$

$$2. \quad \sum Y_i = Y_A - F_q - Y_1 + F_B = 0$$

$$3. \quad \sum M_A = a \cdot Y_1 + 1.5a \cdot F_q - M_1 - a \cdot F_2 - 4a \cdot F_B = 0$$

$$Z_A = +Z_1 - F_2 = 2 - 1 = 1 \text{ kN}$$

$$F_B = \frac{1}{4a} (a \cdot Y_1 + 1.5a \cdot F_q - M_1 - a \cdot F_2) = \frac{1}{4} (Y_1 + 1.5F_q - \frac{M_1}{a} - F_2)$$

$$F_B = \frac{1}{4} (2 + 1.5 \cdot 2.4 - \frac{2}{1} - 1) = \frac{2.6}{4} = 0.65 \text{ kN}$$

$$Y_A = F_q + Y_1 - F_B = 2.4 + 2 - 0.65 = 3.75 \text{ kN}$$

$$\text{Provera otpora} \quad \sum M_B = -4a \cdot Y_A + 3a \cdot Y_1 + 2.5a \cdot F_q + M_1 + a \cdot F_2 =$$

$$-4 \cdot 1 \cdot 3.75 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2.5 \cdot 1 \cdot 2.4 + 2 + 1 \cdot 1 = -15 + 6 + 6 + 2 + 1 = 0$$

Izvršiti podelu na polja 4 polja

I polje z od 0 do a

1. Aksijalna sila

$$F_a = Z_A \quad z=0 \quad F_a = Z_A = 1 \text{ kN}$$

$$z=a \quad F_a = Z_A = 1 \text{ kN}$$

2. Transverzalna sila

$$F_T = Y_A - q \cdot z \quad z=0 \quad F_T = Y_A = 3.75 \text{ kN}$$

$$z=a \quad F_T = Y_A - a \cdot q = 3.75 - 1 \cdot 0.8 = 2.95 \text{ kN}$$

3. Moment savijanja sa leve strane

$$M_f = Y_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2} \quad z=0 \quad M_f = 0$$

$$z=a \quad M_f = Y_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} = 3.75 \cdot 1 - 0.8 \frac{1^2}{2} = 3.35 \text{ kNm}$$

II polje z od a do 2a

1. Aksijalna sila

$$F_a = Z_A - Z_1 \quad z=a \quad F_a = Z_A - Z_1 = 1 - 2 = -1 \text{ kN}$$

$$z=2a \quad F_a = Z_A - Z_1 = 1 - 2 = -1 \text{ kN}$$

2. Transverzalnalna sila

$$F_T = Y_A - q \cdot z - Y_1 \quad z=a \quad F_T = Y_A - q \cdot a - Y_1 = 3.75 - 0.8 \cdot 1 - 2 = 0.95 \text{ kN}$$

$$z=2a \quad F_T = Y_A - a \cdot q - Y_1 = 3.75 - 2 \cdot 0.8 - 2 = 0.15 \text{ kN}$$

3. Moment savijanja sa leve strane

$$M_f = Y_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2} - Y_1(z - a)$$

$$z=a \quad M_f = Y_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} - Y_1(a - a) = 3.75 \cdot 1 - 0.8 \frac{1^2}{2} = 3.35 \text{ kNm}$$

$$z=2a \quad M_f = Y_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} - Y_1(2a - a) = 3.75 \cdot 1 - 0.8 \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 = 3.9 \text{ kNm}$$

III polje z od 2a do 3a

1. Aksijalna sila

$$F_a = Z_A - Z_1 \quad z=2a \quad F_a = Z_A - Z_1 = 1 - 2 = -1 \text{ kN}$$

$$z=3a \quad F_a = Z_A - Z_1 = 1 - 2 = -1 \text{ kN}$$

2. Transverzalnalna sila

$$F_T = Y_A - q \cdot z - Y_1 \quad z=2a \quad F_T = Y_A - 2a \cdot q - Y_1 = 3.75 - 2 \cdot 0.8 - 2 = 0.15 \text{ kN}$$

$$z=3a \quad F_T = Y_A - 3a \cdot q - Y_1 = 3.75 - 3 \cdot 0.8 - 2 = -0.65 \text{ kN}$$

3. Moment savijanja sa leve strane

$$M_f = Y_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2} - Y_1(z - a) - M_1$$

$$z=2a \quad M_f = Y_A \cdot 2a - q \cdot \frac{4a^2}{2} - Y_1(2a - a) - M_1 = 3.75 \cdot 2 - 0.8 \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 - 2 = 1.9 \text{ kNm}$$

$$z=3a \quad M_f = Y_A \cdot 3a - q \cdot \frac{9a^2}{2} - Y_1(3a - a) - M_1 = 3.75 \cdot 3 - 0.8 \frac{3^2}{2} - 2 \cdot 2 - 2 = 1.65 \text{ kNm}$$

IV polje z od 3a do 4a

1. Aksijalna sila

$$F_a = Z_A - Z_1 + F_2 \quad z=3a \quad F_a = Z_A - Z_1 + F_2 = 1 - 2 + 1 = 0kN$$

$$z=4a \quad F_a = Z_A - Z_1 + F_2 = 1 - 2 + 1 = 0kN$$

2. Transverzalnalna sila

$$F_T = Y_A - 3a \cdot q - Y_1 \quad z=3a \quad F_T = Y_A - 3a \cdot q - Y_1 = 3.75 - 3 \cdot 0.8 - 2 = -0.65 kN$$

$$z=4a \quad F_T = Y_A - 3a \cdot q - Y_1 = 3.75 - 3 \cdot 0.8 - 2 = -0.65 kN$$

3. Moment savijanja sa leve strane

$$M_f = Y_A \cdot z - q \cdot 3a \frac{2z-3a}{2} - Y_1(z-a) - M_1$$

$$z=3a \quad M_f = Y_A \cdot 3a - q \cdot 3a \frac{3a-3a}{2} - Y_1(3a-a) - M_1 = 3.75 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 = 1.65 kNm$$

$$z=4a \quad M_f = Y_A \cdot 4a - q \cdot 3a \frac{8a-3a}{2} - Y_1(4a-a) - M_1 = 3.75 \cdot 4 - 0.8 \cdot 3 \cdot 2.5 - 2 \cdot 3 - 2 = 0$$

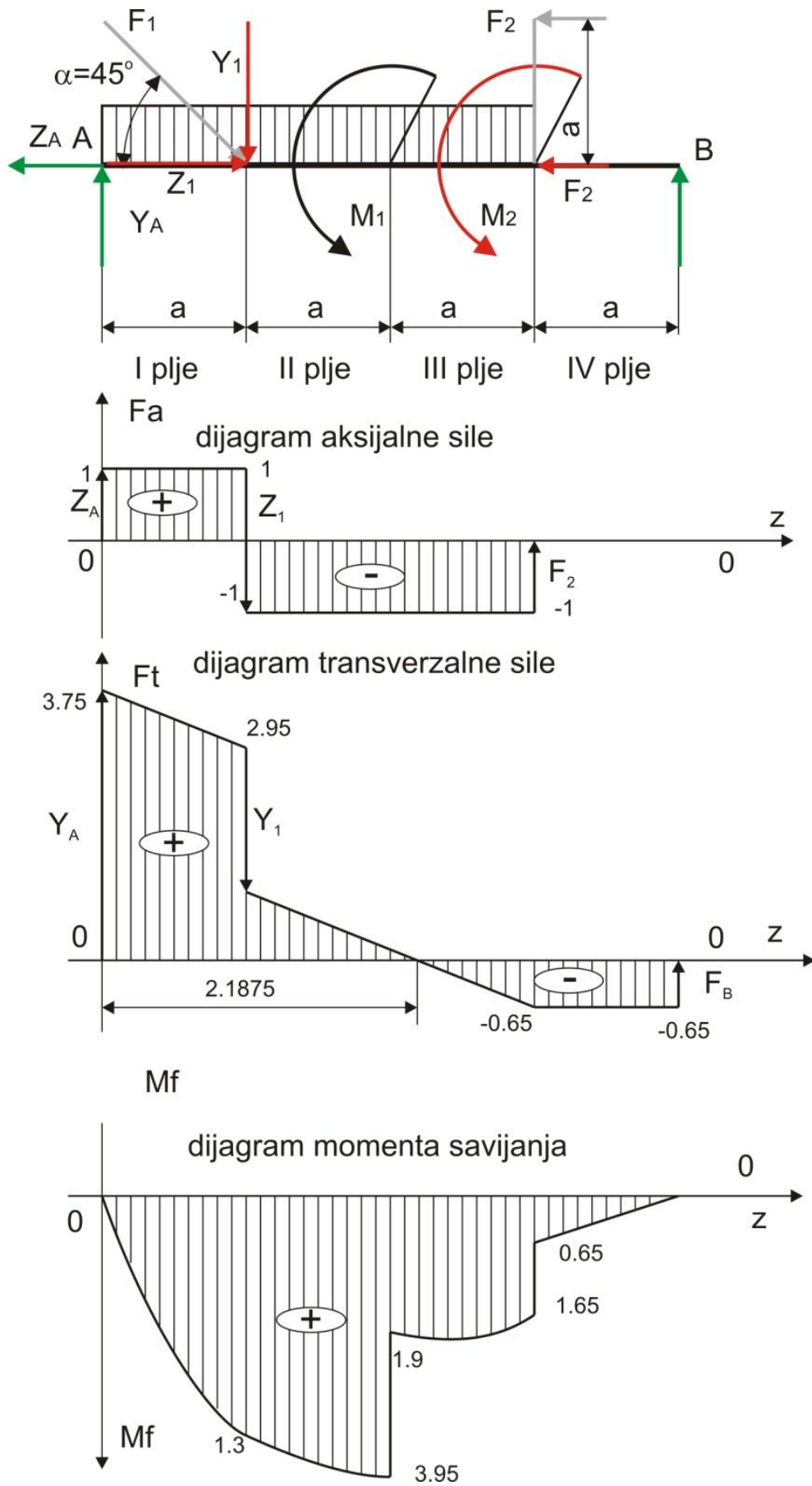
U trećem polju transverzalna sila menja znak ima nulu pa se određuje z_0

$$F_T = Y_A - q \cdot z_0 - Y_1 = 0$$

$$z_0 = \frac{Y_A - Y_1}{q} = \frac{3.75 - 2}{0.8} = 2.1875 m$$

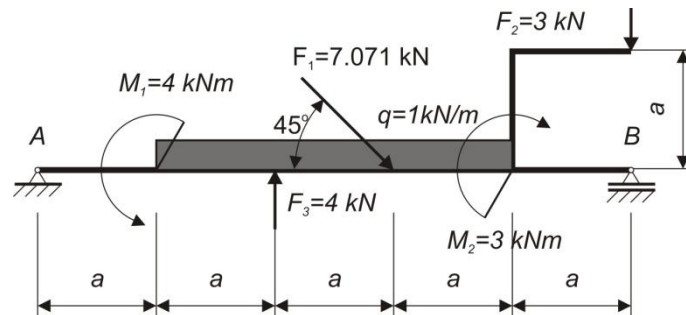
$$M_f = Y_A \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} - Y_1(z_0 - a) - M_1 =$$

$$M_f = 3.75 \cdot 2.1875 - 0.8 \cdot \frac{2.1875^2}{2} - 2 \cdot 1.1875 - 2 = 1.9999 kNm$$

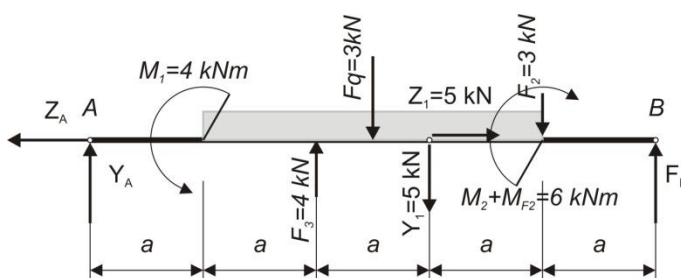


Primer 3.6

Za prostu gredu prikazanu na slici odrediti otpore oslonaca i nacrtati osnovne statičke dijagrame. Poznata su opterećenja $F_1 = 5\sqrt{2}$ kN, $F_2 = 3$ kN, $M_1 = 4$ kNm, $q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $a=1$ m a ugao $\alpha=45^\circ$.



Da bi se rešila data greda treba paralelno premestiti silu F_2 na pravac grede što uslovljava dodavanje momenta u tački u koju se sila premešta a jednakog proizvodu normalnog rastojanja i sile. Kako u istoj tački deluje moment onda se određuje njihov algebarski zbir. U osloncima se zamenjuje njihovo dejstvo reakcijama oslonaca, kod tačke nepokretnog oslonca A kosa sila u ravni odnosno dve komponente i u tački pokretnog oslonca B vertikalna sila.



$$Z_1 = F_1 \cos \alpha = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \text{ kN}$$

$$Y_1 = F_1 \sin \alpha = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \text{ kN}$$

$$M_{F_2} = F_2 \cdot a = 3 \cdot 1 = 3 \text{ kNm}$$

$$F_q = q \cdot 3a = 1 \cdot 3 = 3 \text{ kN}$$

$$1. \quad \sum Z_i = -Z_A + Z_1 = 0$$

$$2. \quad \sum Y_i = Y_A - F_q + F_3 - Y_1 - F_2 + F_B = 0$$

$$3. \quad \sum M_A = -M_1 + q \cdot 3a \cdot 2.5a - F_3 \cdot 2a + Y_1 \cdot 3a + F_2 \cdot 4a + M_2 + M_{F_2} - F_B \cdot 5a = 0$$

$$Z_A = Z_1 = 5 \text{ kN}$$

$$F_B = \frac{1}{5a} (-M_1 + q \cdot 3a \cdot 2.5a - F_3 \cdot 2a + Y_1 \cdot 3a + F_2 \cdot 4a + M_2 + M_{F_2})$$

$$F_B = \frac{1}{5} (-2 + 1 \cdot 3 \cdot 2.5 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 + 3) = 5.7 \text{ kN}$$

$$Y_A = F_q - F_3 + Y_1 + F_2 - F_B = 3 - 4 + 5 + 3 - 5.7 = 1.3 \text{ kN}$$

Izvršiti proveru izračunatih otpora oslonaca računanjem momentne jednačine za oslonac B.

$$\sum M_B = Y_A \cdot 5a - M_1 - 3a \cdot q \cdot \frac{5a}{2} + F_3 \cdot 3a - Y_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 1a + M_2 + M_{F_2}$$

$$\sum M_B = 1.3 \cdot 5 - 4 - 3 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 + 3 = 0$$

Pošto greda ima dva koncentrisana momenta, moment kao posledicu paralelnog premeštanja sile, kontinualno opterećenje, tri koncentrisane sile, raspon grede deli se na četiri polja.

Polje I $0 \leq z \leq a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A = 5 \text{ kN}$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A = 1.3 \text{ kN}$$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = Y_A \cdot z = 1.3 \cdot z$$

vrednost su za $z=0$: $M_f(z=0) = 0$

vrednost su za $z=a=1$: $M_f(z=1) = 1.3 \text{ kNm}$

Polje II $a \leq z \leq 2a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A = 5 \text{ kN}$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A - q(z - a)$$

vrednost su za $z=a=1$: $F_T(z=1) = 1.3 \text{ kN}$

vrednost su za $z=2a=2$: $F_T(z=2) = 0.3 \text{ kN}$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = Y_A \cdot z - M_1 - \frac{1}{2}q(z - a)^2 = 1.3 \cdot z - 4 - 0.5qz^2 + qza - \frac{1}{2}qa^2$$

$$M_f = Y_A \cdot z - M_1 - \frac{1}{2}q(z - a)^2 = 1.3 \cdot z - 4 - 0.5z^2 + z - 0.5 = 1.3z - 0.5z^2 - 4.5$$

vrednost su za $z=a=1$: $M_f(z=1) = -2.7 \text{ kNm}$

vrednost su za $z=2a=2$: $M_f(z=2) = -1.9 \text{ kNm}$

Polje III $2a \leq z \leq 3a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A = 5 \text{ kN}$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

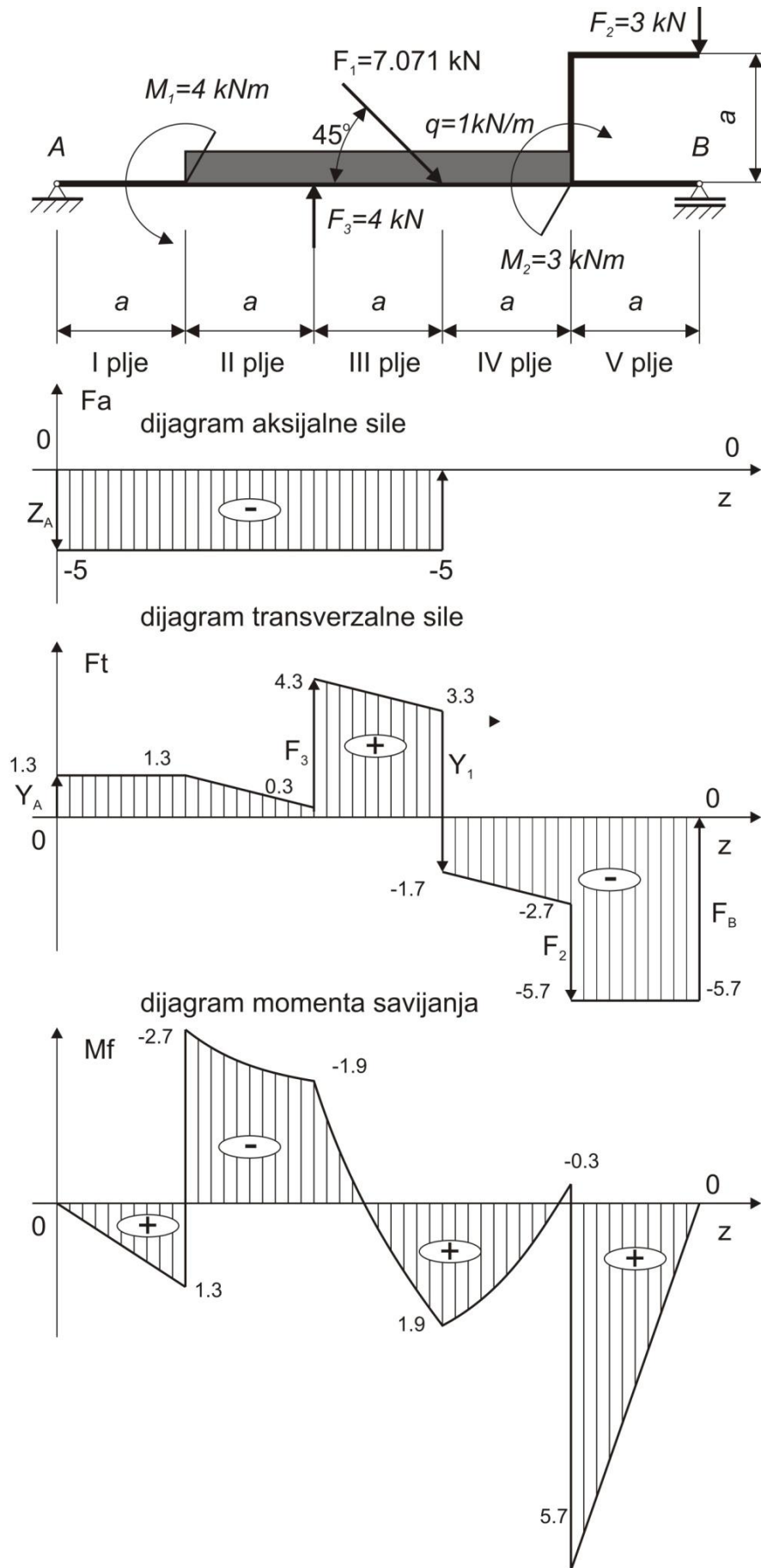
$$F_T = Y_A - qz + F_3 = 1.3 - 1z + 4$$

vrednost su za $z=2a=2$: $F_T(z=2) = 4.3 \text{ kN}$

vrednost su za $z=3a=3$: $F_T(z=3) = 3.3 \text{ kN}$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$\begin{aligned} M_f &= Y_A \cdot z - M_1 - \frac{1}{2}q(z - a)^2 + F_3(z - 2a) = \\ &= 1.3 \cdot z - 4 - 0.5qz^2 + qza - \frac{1}{2}qa^2 + 4z - 8a = \\ &= 6.3z - 0.5z^2 - 12.5 \end{aligned}$$



$$= 6.3z - 0.5z^2 - 12.5$$

vrednost su za $z=2a=2$: $M_f(z=2) = -1.9 \text{ kNm}$

vrednost su za $z=3a=3$: $M_f(z=3) = 1.9 \text{ kNm}$

Polje IV $3a \leq z \leq 4a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A - Z_1 = 0$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A - q(z - a) + F_3 - Y_1 = 1.3 - 1z + 1 + 4 - 5 = 1.3 - z$$

vrednost su za $z=3a=3$: $F_T(z=3) = -1.7 \text{ kN}$

vrednost su za $z=4a=4$: $F_T(z=4) = -2.7 \text{ kN}$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = Y_A \cdot z - M_1 - \frac{1}{2}q(z - a)^2 + F_3(z - 2a) - Y_1(z - 3a) =$$

$$= 1.3 \cdot z - 4 - 0.5qz^2 + qza - \frac{1}{2}qa^2 + 4z - 8a - 5z + 15a =$$

$$= 1.3 \cdot z - 0.5z^2 + 2.5$$

vrednost su za $z=3a=3$: $M_f(z=3) = 1.9 \text{ kNm}$

vrednost su za $z=4a=4$: $M_f(z=4) = -0.3 \text{ kNm}$

Polje V $4 \leq z \leq 5a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A - Z_1 = 0$$

2. Promena transverzalne sile(sa desne strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = -Y_B = -5.7 \text{ kN}$$

3. Promena momenta savijanja(sa desne strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = Y_B \cdot (z - 5a) = 5.7 \cdot z - 28.5$$

vrednost su za $z=4a=4$: $M_f(z=4) = -5.7 \text{ kNm}$

vrednost su za $z=5a=5$: $M_f(z=5) = 0$