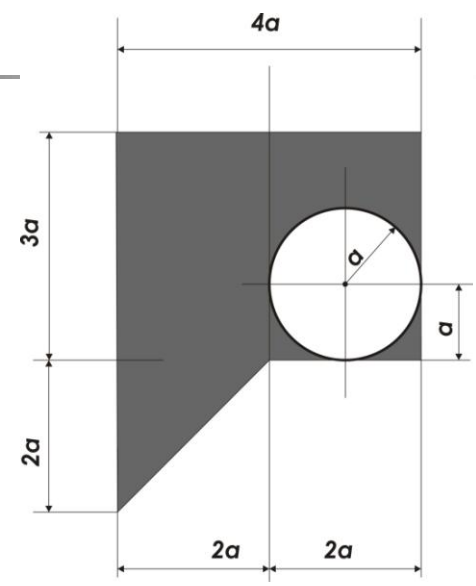
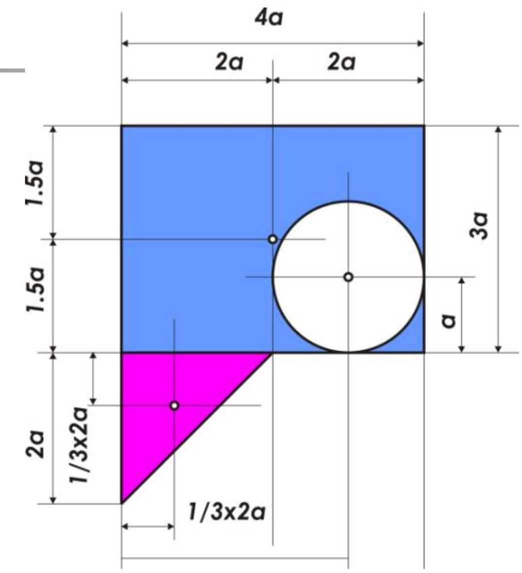
primer I zadatka za grafički

Momenti inercije složene ravne površi

Složena površ čiji moment inercije se traži



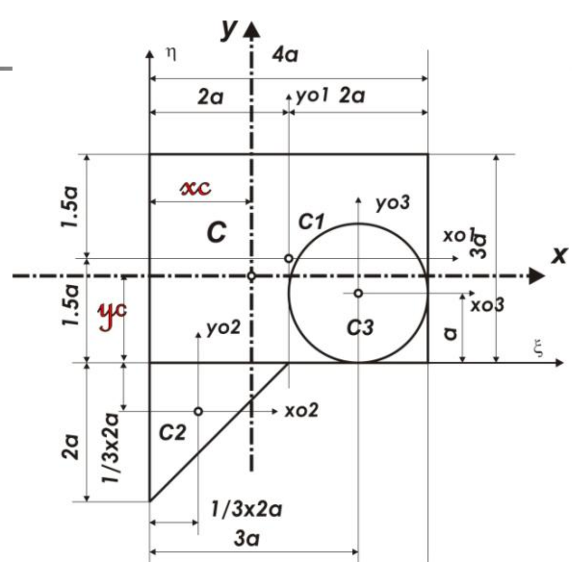
Podeliti na poznate površi



Odrediti težište složene površi

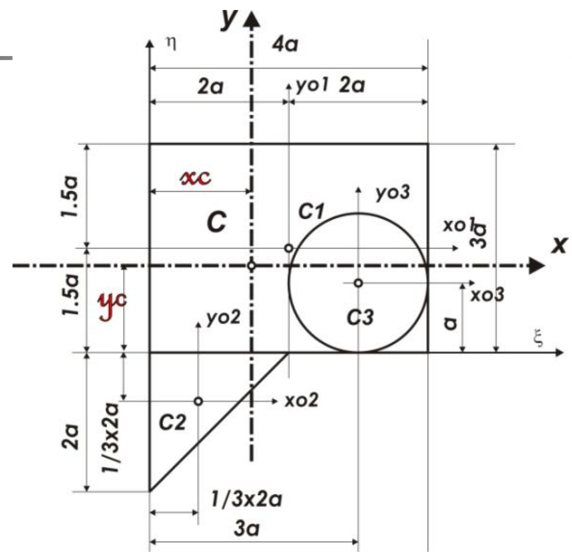
$$x_C = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A}$$

$$y_C = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A}$$



Iz tablica očitati vrednosti momenata za težišne ose svake površi

I_{x01}
I_{y01}
I_{x01y01}
I_{x02}
I_{y02}
I_{x02y02}
I_{x03}
I_{y03}
I_{x03y03}



Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

- Moment inercije za vantežišne paralelne ose jednak je zbiru sopstvenih momenata inercije (težišnih) i položajnih momenata inercije

$$I_x = I_\xi + y_C^2 A$$

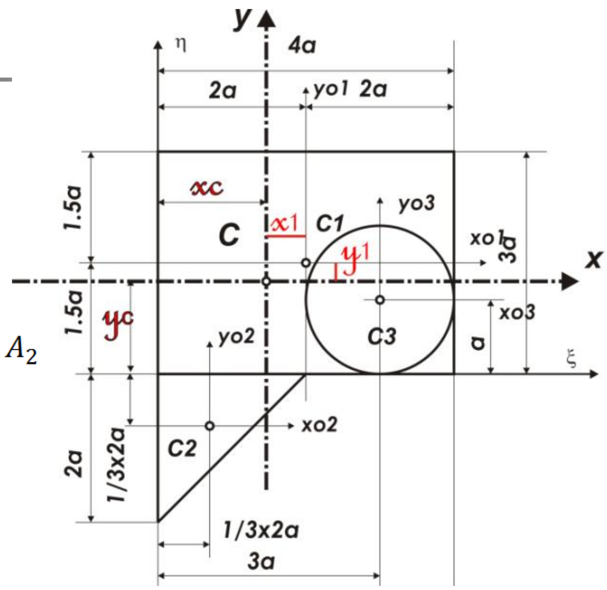
$$I_y = I_\eta + x_C^2 A$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_C y_C A$$

Napomena: rastojanja xc i yc uzimati sa svojim znakom

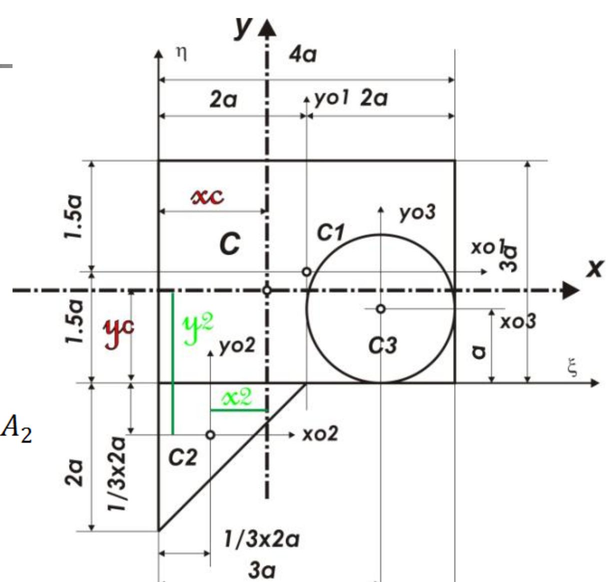
Za težišne ose odrediti momente inercije No1

$$I_{x1} = I_{x01} + y_1^2\,A_1$$
$$I_{y1} = I_{y01} + x_1^2\,A_1$$
$$I_{x1y1} = I_{x01yo1} + x_1 y_1\,A_2$$



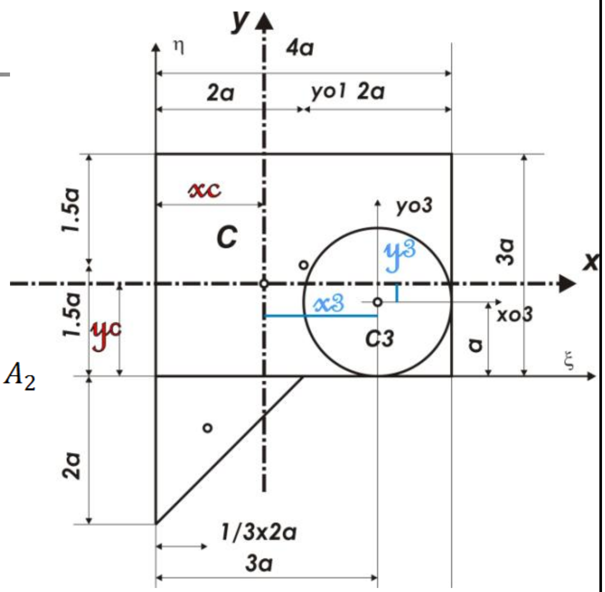
Za težišne ose odrediti momente inercije No2

$$I_{x2} = I_{x02} + y_2^2\,A_2$$
$$I_{y2} = I_{y02} + x_2^2\,A_2$$
$$I_{x2y2} = I_{x02yo2} + x_2 y_2\,A_2$$



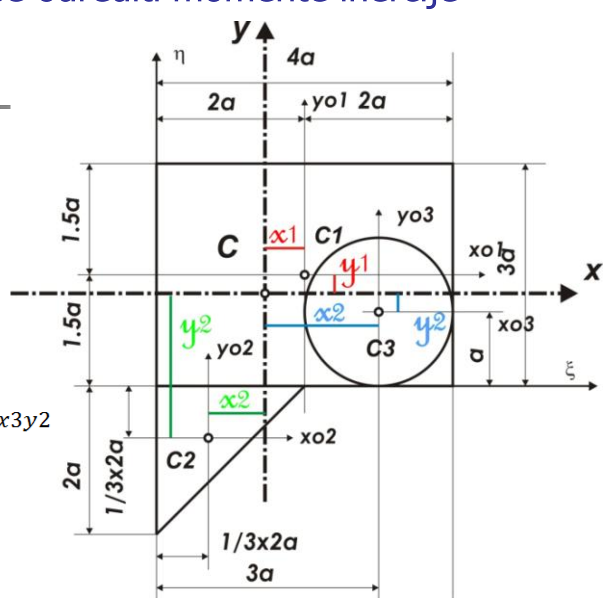
Za težišne ose odrediti momente inercije No3

$$I_{x3} = I_{x03} + y_3^2\, A_1$$
$$I_{y3} = I_{y03} + x_3^2\, A_1$$
$$I_{x3y3} = I_{x03yo3} + x_3 y_3\, A_2$$



Za težišne ose odrediti momente inercije

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} - I_{x3}$$
$$I_y = I_{y1} + I_{y2} - I_{y3}$$
$$I_{xy} = I_{x1y1} + I_{x2y2} - I_{x3y2}$$



Glavni momenti inercije i glavne ose inercije

Kako se drugi izraz za moment može dobiti iz prvog zamenom φ sa φ+90° analiziraju se drugi i treći izraz

$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x + I_y)\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi$$

Navedeni izrazi su neprekidne funkcije ugla φ pa se mogu odrediti ekstremne vrednosti:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -(I_x + I_y)\sin 2\varphi + -2I_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

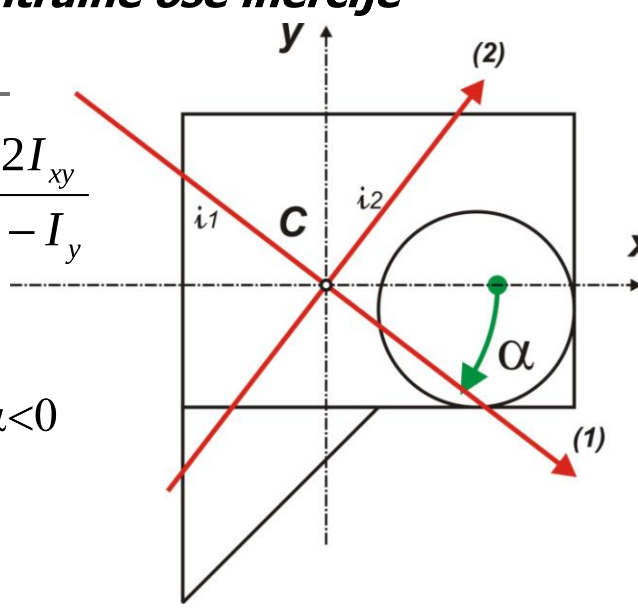
argument φ koji zadovoljava ovu jednačinu obeležimo sa α

$$-(I_x + I_y)\sin 2\alpha + -2I_{xy}\cos 2\alpha = 0 \;|: \cos 2\alpha$$

$$\boxed{tg\,2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

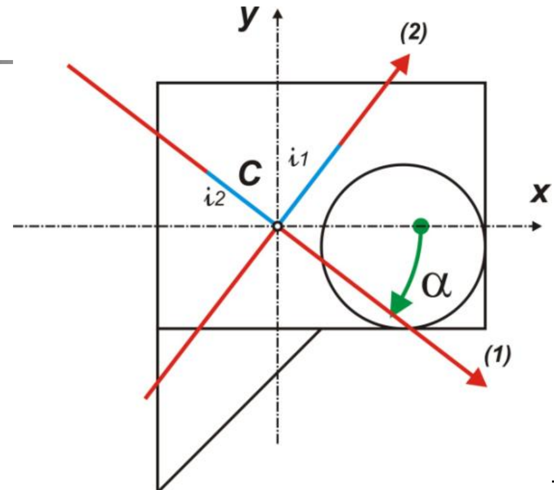
Glavne centralne ose inercije

$$tg\,2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$



U primeru tg2α<0

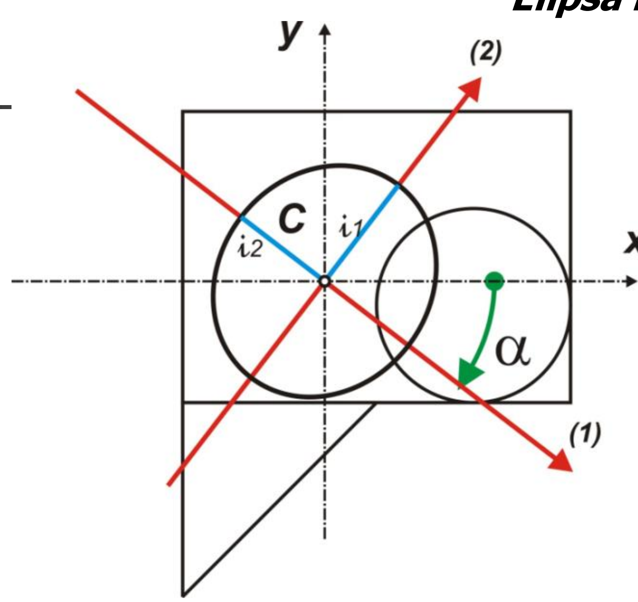
Poluprečnici inercije



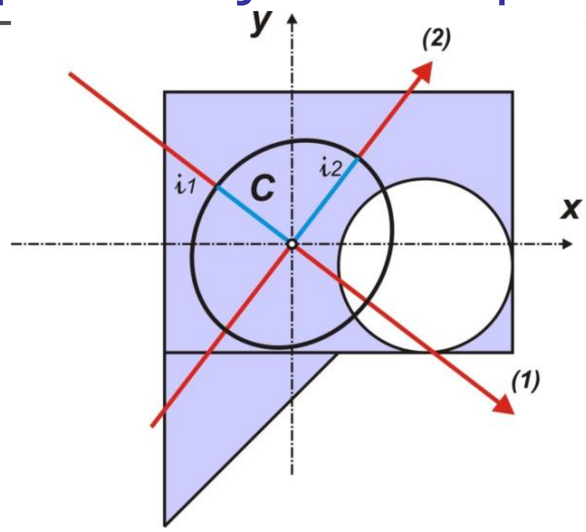
$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

$$I_{12} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

Elipsa inercije



Elipsa inercije za dati primer



Otpornost materijala

Smicanje

Unutrašnje sile i naponi, deformacije, modul klizanja, dimenzionisanje

Otpornost materijala

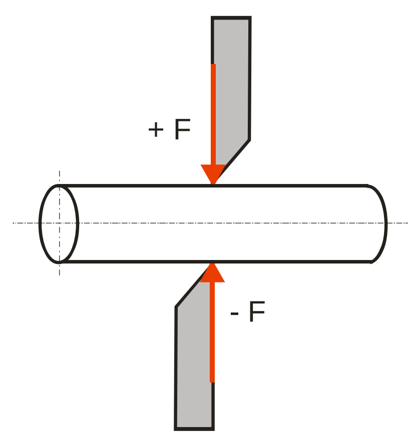
Osnovne vrste naprezanja:

- Aksijalno naprezanje
- Smicanje
- Uvijanje
- Savijanje
- Izvijanje

Otpornost materijala

Smicanje

- Ako deluju samo transverzalne (poprečne) sile, naprezanje je čisto smicanje



Otpornost materijala

Hukov zakon

- Od koordinatnog početka do tačke P (granice proporcionalnosti) postoji proporcionalnost između napona i dilatacije

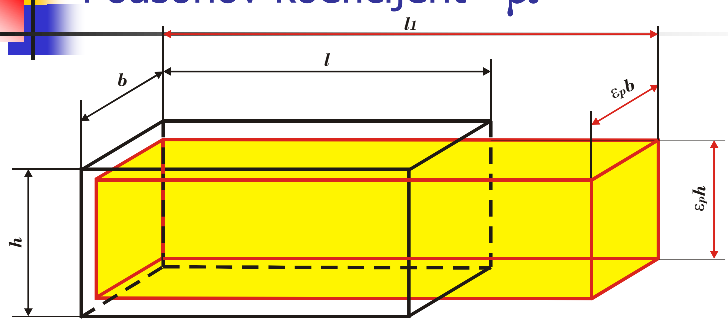
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

- E – koeficijent proporcionalnosti MODUL ELASTIČNOSTI ili Jungov modul

Dimenzija napona MPa

Otpornost materijala

Poasonov koeficijent μ



ε – uzdužna dilatacija

ε_P – poprečna dilatacija

$$\varepsilon_p = -\mu \cdot \varepsilon$$

- koeficijent zavisnosti poprečne dilatacije od uzdužne
- Poasonov koeficijent je neimenovan broj

Poasonov koeficijent

Izračunavanjem zapremina pre i posle deformacije dobija se zapreminska dilatacija kao

$$V = l \cdot b \cdot h$$

$$V = l_1 \cdot b_1 \cdot h_1 = l \cdot b \cdot h(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V}$$

$$\varepsilon_V \approx \varepsilon(1-2\mu)$$

Poasonov koeficijent i modul elastičnosti

Materijal	μ [-]	E [MPa]
Čelik	0,3	$2.1 \cdot 10^5$
Aluminijum	0,34	$0.7 \cdot 10^5$
Bakar	0,33	$1.1 \cdot 10^5$
Mesing	0,37	$1.0 \cdot 10^5$
Sivi liv	0,25	$1.0 \cdot 10^5$
Beton	1/6	$0.3 \cdot 10^5$

Otpornost materijala

Analiza naprezanja u dva pravca, ravansko naprezanje

- Zatezanje u dva pravca
- Pritisak u dva pravca
- Zatezanje i pritisak - odakle se dobija odnos modula elastičnosti i modula klizanja

Otpornost materijala

Smicanje

- Za razliku od dilatacija kod zatezanja, kod čistog smicanja nema promene zapremine već se deformacija ogleda u promeni oblika
- Deformacija se naziva klizanje i registruje kroz ugao klizanja ili kraće klizanje γ
- Klizanje se može dovesti u vezu sa tangencijalnim naponom
- Klizanje je vrlo mali ugao

Modul klizanja

- Klizanje je srazmerno tangencijalnom naponu
- Kao i kod aksijalnog naprezanja važi Hukov zakon
- Koeficijent srazmere naziva se ***modul klizanja G***

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Veza modula elastičnosti i modula klizanja

$$G = \frac{E}{2(1+2\mu)} \qquad MPa$$

- G – modul klizanja MPa
- E – modul elastičnosti MPa
- μ - Poasonov koeficijent

Otpornost materijala

Poasonov koeficijent i modul elastičnosti

Materijal	μ [-]	E [MPa]
Čelik	0,3	$2.1 \cdot 10^5$
Aluminijum	0,34	$0.7 \cdot 10^5$
Bakar	0,33	$1.1 \cdot 10^5$
Mesing	0,37	$1.0 \cdot 10^5$
Sivi liv	0,25	$1.0 \cdot 10^5$
Beton	1/6	$0.3 \cdot 10^5$

Otpornost materijala

Moduli klizanja i elastičnosti za čelik

$$G = \frac{E}{2(1+2\mu)} = \frac{E}{2,6} = 4 \cdot 10^8 \quad \frac{N}{m^2} = Pa$$

- $G=8\ 10^4$ MPa– modul klizanja MPa
- $E=2,1\ 10^5$ MPa - modul elastičnosti
- μ=0,3 Poasonov koeficijent

u starim jedinicama $E=2,1\ 10^6$ kp/cm^2 $G=8\ 10^5$ kp/cm^2

Otpornost materijala

Zatezna čvrstoća i smicajna čvrstoća

- Kao i kod zatezanja mogu se snimiti dijagrami zavisnosti tangencijalnog napona i klizanja pri čistom smicanju
- Granica razvlačenja je mnogo niža, oko 80% od granice tečenja kod zatezanja
- Pošto se u tablicama češće nalaze vrednosti zatezne čvrstoće za određeni materijal od vrednosti smicajne čvrstoće koristi se njihov odnos

Otpornost materijala

Dozvoljeni napon kod zatezanja

Dozvoljeni napon je količnik jačine na kidanje, zatezne čvrstoće materijala, od kog je proračunavani deo i stepena sigurnosti

$$\sigma_{doz} = \sigma_d = \frac{\sigma_M}{\nu}$$

Otpornost materijala

Dozvoljeni napon kod uvijanja (torzije)

Dozvoljeni napon je količnik jačine na torziju, smicajne torzione čvrstoće materijala, od kog je proračunavani deo i stepena sigurnosti

$$\tau_{doz} = \tau_d = \frac{\tau_M}{\nu}$$

Otpornost materijala

Dozvoljeni smičući napon

- Najčešće se koristi vrednost dozvoljenog napona na zatezanje umanjena na 80%

$$\tau_{ds} = (0{,}75 - 0{,}80)\sigma_{de}$$

Otpornost materijala

Smičući napon

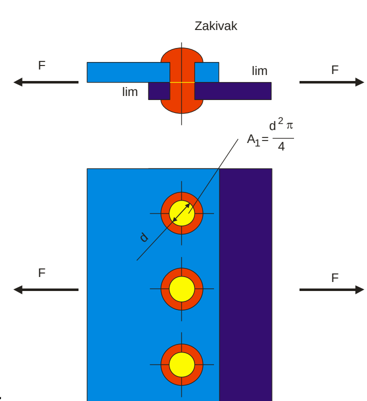
- Napon dela izloženog smicanju mora biti manji ili jednak dozvoljenom naponu
- Tangencijalni napon smicanja predstavlja količnik smičuće sile i površine poprečnog preseka

$$\tau = \frac{F}{A} \le \tau_{doz} \qquad MPa$$

Otpornost materijala

Primeri čisto smičućeg napona

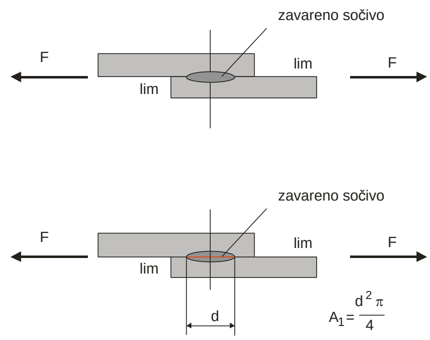
- Zakivci i zakovane konstrukcije
- Izrada rezervoara
- Izrada ramnih i nosećih konstrukcija zakivanjem (sada sve češće ustupaju mesto varenim konstrukcijama)



$$\tau = \frac{F}{nA_1} \le \tau_{doz}$$

Primeri čisto smičućeg napona

- Proračun tačkasto zavarenog spoja (jezgro zavarenog spoja čini sočivo stopljenog materijala izloženo čistom smicanju)

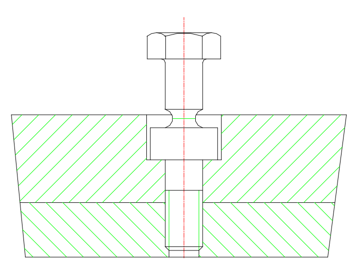


$$\tau = \frac{F}{nA_1} \le \tau_{doz}$$

Primeri čisto smičućeg napona

- Primena zavrtnjeva za osiguranje od preopterećenja neke konstrukcije
- Za prekid pri montaži da bi se sprečila demontaža (montaža brave pod volanom)

$$\tau = \frac{F}{A} = \tau_M$$



Otpornost materijala

Kod smičućeg naprezanja postoje tri osnovna zadatka

1. Poznato je opterećenje i poprečni presek smičuće površine i treba odrediti **veličinu napona**
2. Poznato je opterećenje, oblik poprečnog preseka i materijal, a potrebno je odrediti **dimenzije** tog preseka (broj elemenata)
3. Poznati su poprečni presek i dozvoljeni napon, a potrebno je odrediti **vrednost maksimalne sile smicanja**

Otpornost materijala

Definisanje veličine napona dela izloženog čistom smicanju

- Odrediti vrednosti opterećenja odnosno smičuću silu koja deluje na deo
- Izračunati površinu poprečnog preseka dela
- Sračunati napon koji nastaje delovanjem poprečne sile
- Uporediti vrednost sa određenim dozvoljenim naponom

$$\tau = \frac{F}{A} \leq \tau_{doz} \qquad \text{MPa}$$

Dimenzionisanje dela napregnutog na smicanje

- Odrediti vrednost poprečne - smičuće sile koja deluje na deo
- Odrediti dozvoljeni napon za odabrani materijal
- Sračunati potrebnu površinu preseka

$$A = \frac{F}{\tau_{doz}} \qquad \text{m}^2$$

Otpornost materijala

Odrediti smičuću silu koju može da prenese deo

- Odrediti površinu preseka
- Odrediti dozvoljeni napon za poznati materijal i definisani stepen sigurnosti
- Sračunati maksimalnu smičuću (poprečnu) silu

$$F = \tau_{doz} \cdot A \qquad \text{N}$$

Otpornost materijala

Preporuke pri dimenzionisanju

1. Veličina smičućeg opterećenja - statika
2. Površina poprečnog preseka
3. Tangencijalni napon za poprečni presek
4. Stepen sigurnosti ν
5. Za odabrani materijal dozvoljeni tangencijalni napon
6. Veličina poprečnog preseka
7. Veličina opterećenja za poznatu površinu i materijal

Otpornost materijala

Rezime

- Spoljašnjoj smičućoj sili suprostavlja se unutrašnja sila - proizvod napona i površine
- Smičući napon τ_{max} ravnomerno je raspoređen po površini
- G – modul klizanja
- Hukov zakon: Napon je proporcionalan proizvodu modula klizanja i ugla klizanja
- Maksimalni smičući napon je količnik sile smicanja F i površine poprečnog preseka