

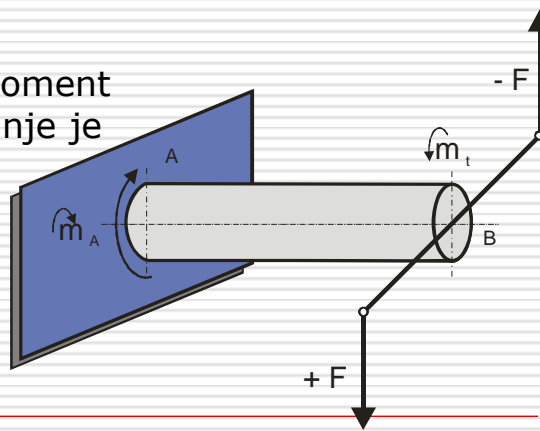
## Uvijanje - torzija

- Obrtni moment i moment uvijanja
- Uvijanje grede kružnog poprečnog preseka
- Odnos modula elastičnosti i modula klizanja
- Dimenzionisanje delova izloženih čistom uvijanju

Otpornost materijala

## Uvijanje - torzija

- Ako u preseku deluje samo moment torzije naprezanje je čisto uvijanje - torzija



## Definicija uvijanja

---

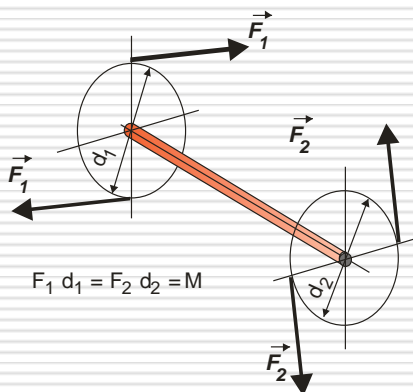
- Uvijanje je naprezanje pri kome se u svakom poprečnom preseku štapa javlja samo moment koji obrće oko ose štapa – moment uvijanja ili moment torzije  $M_t$
- 

## Obrtni moment i moment uvijanja

---

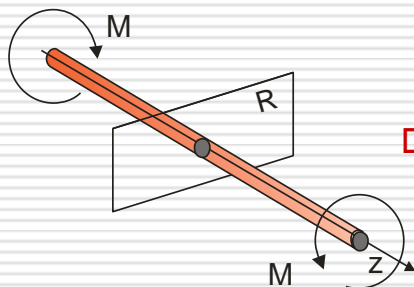
- Kod štapa koji je izložen uvijanju ili torziji deluje samo moment uvijanja dok ostale unutrašnje sile - aksijalna sila, transverzalna i moment savijanja ne postoje.
  - Uzročnici naprezanja su spoljašnji obrtni momenti koji deluju na štap u ravnima upravnim na njegovu osu
-

## Obrtni moment i moment uvijanja



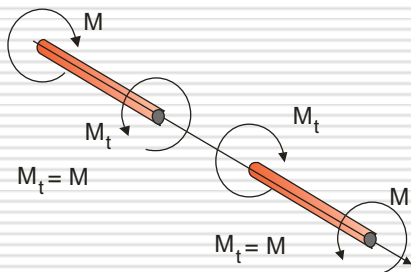
- Štap izložen dejstvu dva sprega
- Da bi štap bio u ravnoteži momenti ovih spregova treba da budu međusobno jednaki po intenzitetu, a suprotnih smerova

## Obrtni moment i moment uvijanja



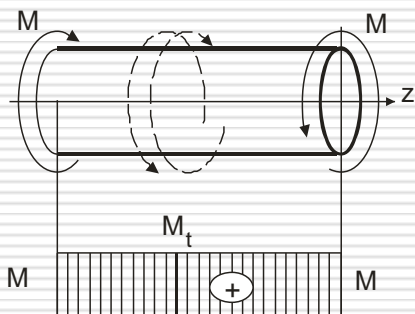
- Da bi se odredio unutrašnji moment uvijanja iskorišćena je metoda preseka
- Štap se preseca zamišljenom ravni R

## Obrtni moment i moment uvijanja



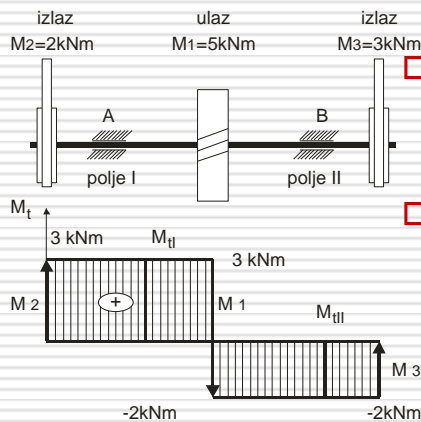
- Svaki od delova treba da bude u ravnoteži
- To je moguće ako je unutrašnji moment u uočenom preseku jednak obrtnom momentu suprotnog smera
- Momenti se razlikuju samo po smeru saglasno zakonu akcije i reakcije

## Obrtni moment i moment uvijanja



- Moment uvijanja  $M_t$ , unutrašnji moment, smatra se pozitivnim ako obrće u smeru kazaljke na časovniku posmatran iz vrha normale na ravan momenta
- Dijagram momenta uvijanja analiziranog štapa

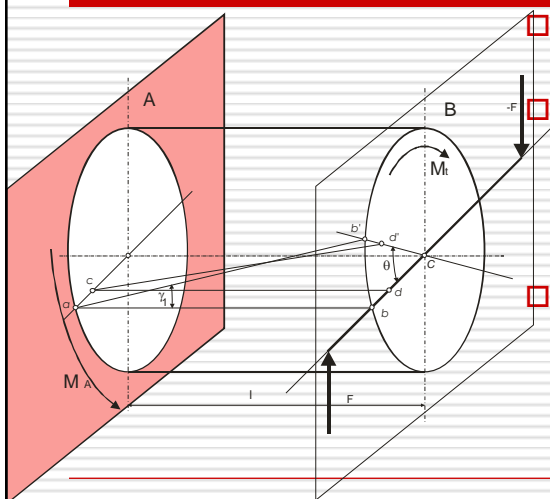
## Obrtni moment i moment uvijanja



Primer transmisije gde se pogoni vratilo sa 5 kNm, a na dva izlaza prosleđuje 3 odnosno 2 kNm

Raspodela torzionog momenta merodavna za određivanje dimenzija vratila i napona u presecima ima izgled kao na slici

## Uvijanje grede kružnog poprečnog preseka



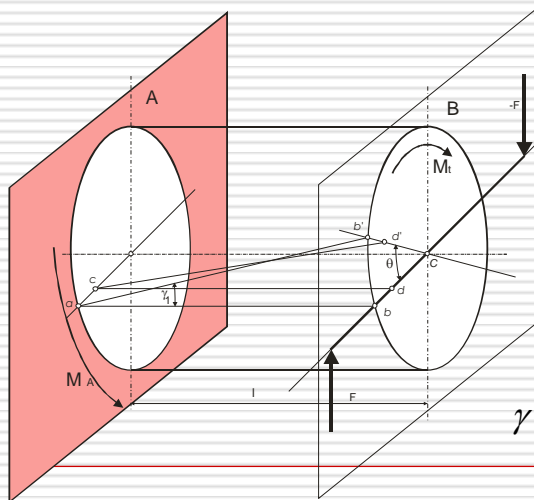
Moment uvijanja  $M_t = M_A$  deluje u ravni B

Nastaje deformacija – pa vlakno se ab na spoljašnjem omotaču **UVIJA** na ab', a vlakno cd na cd' za ugao  $\gamma$

Istovremeno se u ravni B zakrene Cd na Cb' za ugao  $\theta$

## Otpornost materijala

## Uvijanje grede kružnog poprečnog preseka



- Iz trouglova  $\Delta abb'$  i  $\Delta Cbb'$  jednaki lukovi  $bb'$
- $L\gamma_1 = R\theta$  odnosno na nekom prečniku  $L\gamma = r\theta$
- Ugao naginjanja srazmeran je udaljenju od ose

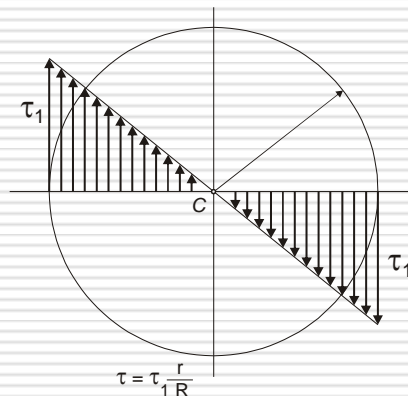
$$\gamma = \gamma_1 \frac{r}{R} \quad \text{za } r=0 \Rightarrow \gamma=0$$

## Otpornost materijala

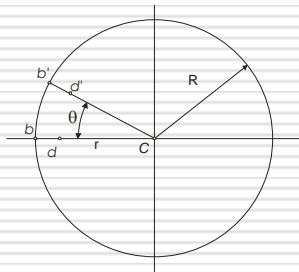
## Uvijanje grede kružnog poprečnog preseka

- Tangencijalni, smicajni napon po poprečnom preseku se menja po zakonu prave linije
- Za vlakno koje se poklapa sa geometrijskom osom tangencijalni napon je jednak nuli
- Najveći je za  $r=R$ ,  $\tau_{\max} = \tau_1$

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{r}{R}$$



## Uvijanje grede kružnog poprečnog preseka



$$\widehat{bb'} = R\theta = \gamma_1$$

$$\widehat{dd'} = r\theta = \gamma$$

$$\gamma = \gamma_1 \frac{r}{R}$$

- Između tangencijalnog napona i deformacije – klizanja postoji odnos

$$\tau = G\gamma \text{ — Hukov zakon}$$

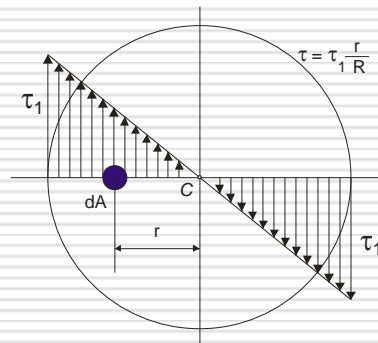
Klizanje je srazmerno tangencijalnom naponu

- G - modul klizanja
- E - modul elastičnosti
- Hukov zakon  $\sigma = E\varepsilon$
- Modul klizanja

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

## Uvijanje grede kružnog poprečnog preseka

- Tangencijalni napon  $\tau$  deluje na  $dA$ , elementarnu površinu na nekom prečniku  $r$
- Ovo se svodi na elementarnu silu  $\tau dA$
- Zbir momenata elementarnih sila za tačku O daje moment torzije  $M_t$



$$M_t = \int_A \tau \cdot r dA = \frac{\tau_1}{R} \int_A r^2 dA = \frac{\tau_1}{R} I_o$$

$I_o$  – polarni moment inercije

## Najveći tangencijalni smicajni napon

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_t R}{I_0} = \frac{M_t}{W_0} \quad \text{MPa}$$

- $\tau_1 = \tau_{\max}$  maksimalni tangencijalni napon, MPa
- $I_0$  - polarni moment inercije,  $\text{m}^4$
- $W_0$  - polarni otporni moment  $W_0 = \frac{I_0}{R} \quad \text{m}^3$

## Ugao uvijanja u rad

$$\theta = \frac{M_t l}{G I_0} = \frac{l}{R} \frac{\tau_{\max}}{G} \quad \text{rad}$$

- $\tau_1 = \tau_{\max}$  maksimalni tangencijalni napon, MPa
- $I_0$  - polarni moment inercije,  $\text{m}^4$
- $G$  - modul klizanja, MPa
- $L$  - dužina, m

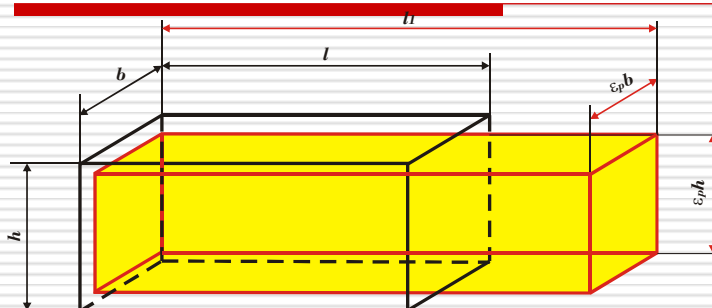


## Ugao uvijanja u stepenima

$$\theta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_t l}{GI_0} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{l}{R} \cdot \frac{\tau_{\max}}{G} \quad 0$$

- $\tau_1 = \tau_{\max}$  maksimalni tangencijalni napon, MPa
- $I_0$  - polarni moment inercije,  $m^4$
- $G$  - modul klizanja, MPa
- $L$  - dužina, m

## Poasonov koeficijent $\mu$



$\varepsilon$  - uzdužna dilatacija

$\varepsilon_p$  - poprečna dilatacija

$$\varepsilon_p = -\mu \cdot \varepsilon$$

koeficijent zavisnosti poprečne dilatacije od uzdužne

Poasonov koeficijent je neimenovan broj

## Otpornost materijala

### Poasonov koeficijent i modul elastičnosti

Materijal	$\mu$ [-]	$E$ [ MPa ]
Čelik	0,3	$2.1 \cdot 10^5$
Aluminijum	0,34	$0.7 \cdot 10^5$
Bakar	0,33	$1.1 \cdot 10^5$
Mesing	0,37	$1.0 \cdot 10^5$
Sivi liv	0,25	$1.0 \cdot 10^5$
Beton	1/6	$0.3 \cdot 10^5$

## Otpornost materijala

### Veza modula elastičnosti i modula klizanja

$$G = \frac{E}{2(1 + 2\mu)} \quad \text{MPa}$$

- G – modul klizanja, MPa
- E – modul elastičnosti, MPa
- $\mu$  – Poasonov koeficijent

## Moduli klizanja i elastičnosti za čelik

$$G = \frac{E}{2(1+2\mu)} = \frac{E}{2,6} = 4 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2} = Pa$$

- $G = 8 \cdot 10^4$  MPa – modul klizanja
- $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa – modul elastičnosti
- $\mu = 0,3$  Poasonov koeficijent

u starim jedinicama  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kp/cm<sup>2</sup>  $G = 8 \cdot 10^5$  kp/cm<sup>2</sup>

## Zatezna čvrstoća i uvojna (torziona) čvrstoća

- Pošto se u tablicama češće nalaze vrednosti zatezne čvrstoće za određeni materijal od vrednosti uvojne čvrstoće koristi se njihov odnos

$$\tau_M = (0,5 - 0,6) \sigma_M$$

## Dozvoljeni napon kod zatezanja

Dozvoljeni napon je količnik jačine na kidanje, zatezne čvrstoće, od kog je proračunavani deo i stepena sigurnosti

$$\sigma_{doz} = \sigma_d = \frac{\sigma_M}{\nu}$$

## Dozvoljeni napon kod uvijanja (torzije)

Dozvoljeni napon je količnik jačine na torziju, smicajne (torziona) čvrstoće, od kog je proračunavani deo i stepena sigurnosti

$$\tau_{doz} = \tau_d = \frac{\tau_M}{\nu}$$

## Dozvoljeni torzioni (smicajni) napon

- Pošto se u tablicama češće nalaze vrednosti dozvoljenog napona na zatezanje koristi se odnos

$$\tau_d = (0,5 - 0,6)\sigma_d$$

## Dimenzionisanje vratila i štapova pri uvijanju

- Dimenzionisanje dela prema maksimalnom torzionom naponu - uslov čvrstoće
- Dimenzionisanje prema dozvoljenom uglu uvijanja po jedinici dužine - uslov deformabilnosti
- **ODABRATI NEPOVOLJNIJI KRITERIJUM**  
– ODNOSNO VEĆE DIMENZIJE

## Otpornost materijala

## Dimenzionisanje prema najvećem torzionom naponu

- Najveći napon pri uvijanju

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_0} \leq \tau_{doz}$$

- Dobija se poprečni presek

$$W_0 \geq \frac{M_t}{\tau_{doz}}$$

- Za kružni poprečni presek

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\tau_{doz}}}$$

## Otpornost materijala

## Dimenzionisanje prema dozvoljenoj deformabilnosti – dozvoljeni ugao uvijanja

- Najveći ugao pri uvijanju

$$\theta'_{doz} \left[ \frac{rad}{m} \right]$$

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_0} \leq \theta'_{doz}$$

- Dobija se poprečni presek

$$I_0 \geq \frac{M_t}{G\theta'_{doz}}$$

- Za kružni poprečni presek

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32M_t}{\pi G\theta'_{doz}}}$$

## Dimenzionisanje

---

Nakon određivanja prethodne dve vrednosti dimenzija poprečnog preseka iz:

- Uslova čvrstoće
- Uslova deformabilnosti

bira se računom dobijena veća vrednost

---

Kod torzionog naprezanja postoje tri osnovna zadatka

---

1. Poznato je opterećenje i poprečni presek štapa i treba odrediti **veličinu napona i ugla deformacije**
  2. Poznato je opterećenje, oblik poprečnog preseka i materijal, a potrebno je odrediti **dimenzije** tog preseka
  3. Poznat je poprečni presek i dozvoljeni napon, a potrebno je odrediti **vrednost maksimalnog torzionog momenta**
-

## 1. Određivanje veličine napona i ugla deformacije

---

Poznato je opterećenje i poprečni presek štapa i treba odrediti **veličinu napona i ugla deformacije**

$$\tau = \frac{M_t}{W_0} \text{ MPa} \qquad \theta' = \frac{M_t}{GI_0} \text{ rad}$$


---

## 2. Određivanje veličine poprečnog preseka

---

Poznato je opterećenje, oblik poprečnog preseka i materijal, a potrebno je odrediti **dimenzije** tog preseka

$$W_0 \geq \frac{M_t}{\tau_{doz}} m^3$$

$$I_0 \geq \frac{M_t}{G\theta'_{doz}} m^4 \qquad \theta'_{doz} \left[ \frac{\text{rad}}{m} \right]$$


---



### 3. Određivanje veličine torzionog momenta koji deo sme da prenese

Poznat je poprečni presek i dozvoljeni napon, a potrebno je odrediti **vrednost maksimalnog torzionog momenta**

$$M_t \leq W_0 \cdot \tau_{doz} \quad Nm$$

$$M_t \leq I_o \cdot G \cdot \theta'_{doz} \frac{M_t}{G \theta'_{doz}} \quad \theta'_{doz} \left[ \frac{rad}{m} \right]$$

**Kao merodavna uzima se manja vrednost**

### Veza između obrtnog momenta i snage

Kada je poznata snaga koju prenosi analizirani deo (vratilo, štap) poznat je i obrtni moment

$$P = M \omega \quad W \quad \omega \left[ \frac{1}{s} \right]$$

$$M = \frac{P}{\omega} \quad Nm \text{ odnosno } J$$

## Veza između obrtnog momenta i snage

Kada je poznata snaga koju prenosi analizirani deo (vratilo, štap) poznat je i obrtni moment

$$P = M \frac{\pi \cdot n}{30} \quad W \qquad n \left[ \frac{o}{min} \right] \quad n \left[ min^{-1} \right]$$

$$M = \frac{30P}{\pi \cdot n} \quad Nm$$

## Rezime

- Moment uvijanja jednak je spoljašnjem obrtnom momentu suprotnog smera  $M_t = M$
- Kod uvijanja najviše se deformišu (uvijaju) spoljašnja vlakna, vlakna u osi se ne deformišu
- Smicajni napon  $\tau_{max}$  najveći je na spoljašnjim vlaknima
- G - modul klizanja
- Hukov zakon: napon je proporcionalan proizvodu modula klizanja i ugla uvijanja
- Maksimalni smičući napon je količnik momenta  $M_t$  torzije i  $W_0$  polarnog otpornog momenta
- Maksimalni ugao uvijanja je količnik momenta torzije  $M_t$  i proizvoda modula klizanja i polarnog momenta inercije  $GI_0$